XIX Olimpiadi Italiane di Astronomia

Corso di preparazione alla Finale Nazionale

Categoria Junior 1 – Lezione 1

Problema 1

Vi trovate sulla Luna esattamente al centro della faccia visibile dalla Terra. Sapendo che il periodo sinodico della Luna è di circa 29.5 giorni, ogni quanto tempo vedrete sorgere il Sole? Quando per voi sorge il Sole, con che fase è vista la Luna dalla Terra? Dalla stessa posizione, ogni quanto tempo vedrete sorgere la Terra?

Soluzione.

Il giorno solare sulla Luna (che in analogia con la Terra possiamo definire come l'intervallo tra due passaggi consecutivi del Sole al meridiano, oppure come due configurazioni analoghe quali due albe consecutive) corrisponde al periodo delle fasi lunari, e vale, in media, 29.5 giorni. Dalla vostra posizione vedrete quindi che il Sole sorge in media una volta ogni 29.5 giorni.

Se sulla Luna vedete sorgere il Sole, visti dalla Terra vi trovate sul cosiddetto ”terminatore”, la linea che separa la parte illuminata da quella non illuminata dal Sole. Se siete su un punto al centro della faccia visibile della Luna, dalla Terra la Luna sarà al “primo quarto”.

La faccia della Luna visibile dalla Terra è, a causa della rotazione sincrona della Luna, sempre la stessa. Quindi dal centro della Luna la Terra apparirà quasi immobile nel cielo, a parte piccoli effetti dovuti alle librazioni, e non la vedrete mai né sorgere né tramontare.

Problema 2

Nel film "Il pianeta proibito" i protagonisti scappano da un pianeta simile alla Terra dopo aver attivato un sistema che ne provocherà la distruzione dopo 24h dalla loro partenza. Se l'astronave con cui fuggono viaggia a una velocità $v_A = 0.180 \cdot c$, a che distanza si troveranno dal pianeta quando lo vedranno esplodere?

Soluzione.

Dobbiamo considerare il fatto che l'astronave non è ferma, ma si sta allontanando dal pianeta. Quindi la luce emessa nell'esplosione, che viaggia alla velocità **c**, deve "inseguire" l'astronave che viaggia però a una velocità minore.

Detto **t** il tempo necessario alla luce per raggiungere l'astronave, al momento in cui dall'astronave si assisterà all'esplosione il tempo **T** trascorso dalla partenza sarà:

$$T = 24\ \mathrm{h} + t$$

Detto $\mathbf{s_0}$ ($= v_A \cdot 24\mathrm{h} = 0.180 \cdot c \cdot 86400\ \mathrm{s} \simeq 4.66 \cdot 10^9\ \mathrm{km}$) lo spazio percorso dall'astronave in 24h, lo spazio totale s_A percorso dal momento della partenza fino a quando l'astronave verrà raggiunta dalla luce dell'esplosione è dato dalla relazione: $s_A = s_0 + v_A \cdot t$

Lo spazio $\mathbf{s_L}$ percorso dalla luce dal momento dell'esplosione fino a quando raggiungerà l'astronave è dato dalla relazione: $s_L = c \cdot t$

Quando la luce dell'esplosione raggiunge l'astronave avremo: $s_A = s_L$ e quindi: $s_0 + v_A \cdot t = c \cdot t$ da cui si ricava: $t = \frac{s_0}{c - v_A} = \frac{s_0}{0.820\ c}$ e avremo infine:

$$T = 24\ \mathrm{h} + t = 24\ \mathrm{h} + \frac{s_0}{0.820\ c} \simeq 86400\ \mathrm{s} + \frac{4.66 \cdot 10^9\ \mathrm{km}}{246 \cdot 10^3\ \frac{km}{s}} \simeq 105 \cdot 10^3\ \mathrm{s}\ (\simeq 29\mathrm{h}\ 10\mathrm{m})$$

ovvero quando l'astronave si troverà a una distanza dal pianeta:

$$s_A = s_0 + v_A \cdot t = v_A \cdot T \simeq 0.180 \cdot c \cdot 105 \cdot 10^3\ \mathrm{s} \simeq 5.67 \cdot 10^9\ \mathrm{km} \simeq 37.9\ \mathrm{UA}$$

Problema 3

Assumendo che dopo i 30 km di altezza l'aria dell'atmosfera terrestre diventi così rarefatta da non essere più influente nel calcolo e una densità media $\rho_m = 3.3 \cdot 10^{-4}$ g/cm^3, si calcoli la massa dell'atmosfera della Terra in kg e il suo rapporto con la massa della Terra.

Soluzione.

Detto $\mathbf{R_T}$ il raggio della Terra, con l'approssimazione usata il volume $\mathbf{V_A}$ occupato dall'atmosfera è pari al volume di una sfera con raggio pari a R_T + 30 km, meno il volume di una sfera con raggio pari a R_T:

$$V_A = \frac{4}{3}\pi\,(R_T + 30\text{ km})^3 - \frac{4}{3}\pi\,(R_T)^3 \simeq 1.102 \cdot 10^{12}\text{ km}^3 - 1.087 \cdot 10^{12}\text{ km}^3 \simeq 1.50 \cdot 10^{10}\text{ km}^3$$

La densità media dell'atmosfera della Terra vale:

$$\rho_m = 3.3 \cdot 10^{-4}\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 3.3 \cdot 10^{-4}\,\frac{10^{-3}}{10^{-15}}\,\frac{kg}{\text{km}^3} = 3.3 \cdot 10^{8}\,\frac{\text{kg}}{\text{km}^3}$$

Detta $\mathbf{M_a}$ la massa dell'atmosfera e $\mathbf{M_T}$ la massa della Terra avremo:

$$M_a = \rho_m\,V_a \simeq 3.3 \cdot 10^{8} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{km}^3} \cdot 1.50 \cdot 10^{10}\text{ km}^3 \simeq 5.0 \cdot 10^{18}\text{ kg} \simeq 8.3 \cdot 10^{-7}\,M_T$$

Problema 4

In meccanica celeste si parla spesso di "risonanza orbitale": un fenomeno che si verifica quando il rapporto dei periodi orbitali di due oggetti è uguale al rapporto di due numeri interi piccoli. Nel Sistema Solare le risonanze orbitali sono abbastanza frequenti. Sapendo che tre rivoluzioni di Nettuno corrispondono esattamente a due rivoluzioni di Plutone, determinare il periodo di rivoluzione di Plutone e il semiasse maggiore della sua orbita in UA

Soluzione.

Detto $\mathbf{T_N}$ il periodo orbitale di Nettuno e $\mathbf{T_P}$ il periodo orbitale di Plutone, sappiamo che:

$$3 \cdot \mathrm{T_N} = 2 \cdot \mathrm{T_P}$$

Da cui si ricava:

$$\mathrm{T_P} = \frac{3 \cdot \mathrm{T_N}}{2} \simeq \frac{3 \cdot 164.79 \text{ anni}}{2} \simeq 247.19 \text{ anni}$$

Dalla relazione, valida per tutti i corpi in orbita attorno al Sole:

$$T^2\,(anni) = a^3\,(UA)$$

Detto $\mathbf{a_P}$ il semiasse maggiore dell'orbita di Plutone avremo:

$$a_P = \sqrt[3]{T^2} \simeq \sqrt[3]{(247.19)^2} \simeq 39.387\ UA$$

Problema 5

Il raggio vettore di una cometa periodica descrive, in 8 mesi, 1/15 dell'area totale racchiusa nell'orbita ellittica. Determinare il periodo di rivoluzione della cometa.

Soluzione:

Possiamo utilizzare la II Legge di Keplero. Detti $\mathbf{A_1}$ l'area spazzata dal raggio vettore nel tempo $\mathbf{t_1}$ = 8 mesi e **A** l'area totale spazzata dal raggio vettore nell'intero periodo di rivoluzione **T** si ha:

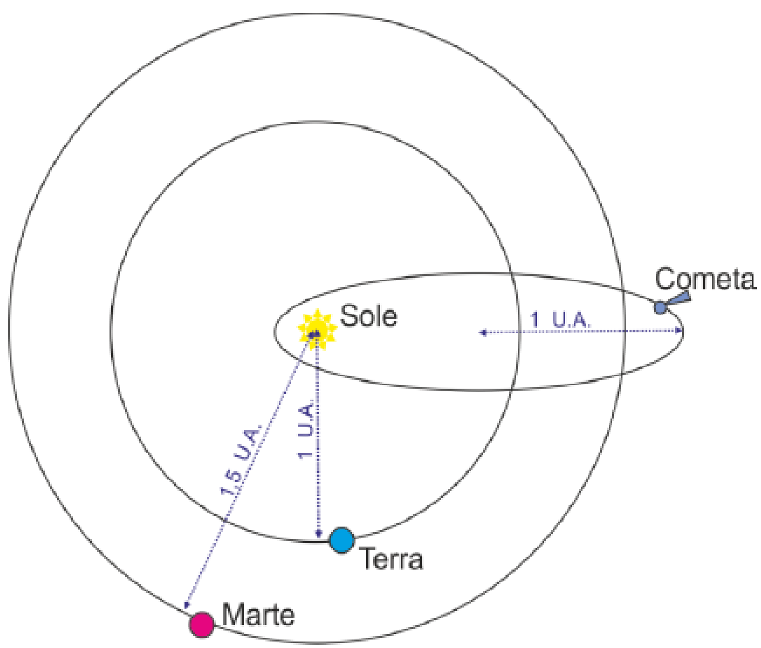
$$\mathrm{A_1} : \mathrm{t_1} = \mathrm{A} : \mathrm{T}$$

ed essendo $\mathrm{A} = 15 \cdot \mathrm{A_1}$ ricaviamo:

$$\mathrm{T} = \frac{A \cdot t_1}{A_1} = \frac{15\, A_1 \cdot t}{A_1} \simeq 15\, mesi \cdot 8\, mesi \simeq 120\, mesi = 10\, anni$$

Problema 6

Una cometa percorre un’orbita che la porta molto vicina al Sole al perielio e poco oltre l’orbita di Marte all’afelio. Il semiasse maggiore dell’orbita è 1 UA. Disegnate le orbite di Terra, Marte e della cometa, con le giuste dimensioni e posizioni attorno al Sole. Quanto tempo impiega la cometa per percorrere la sua orbita attorno al Sole?



Una rappresentazione delle orbite della cometa, della Terra e di Marte attorno al Sole è mostrata nella figura a sinistra

Per calcolare il periodo della cometa applichiamo la III legge di Keplero, che per corpi in orbita attorno al Sole detti **T** il periodo di rivoluzione e **a** il semiasse maggiore dell’orbita assume la forma:

$$T^2\ (anni) = \ a^3\ (UA)$$

da cui ricaviamo:

$$T = \sqrt{a^3} = \sqrt{1} = 1\ anno$$

Il risultato è in qualche modo ovvio, in quanto avendo la cometa lo stesso semiasse maggiore della Terra ha di conseguenza lo stesso periodo orbitale

Problema 7

Supponete di osservare la Luna Piena al meridiano. La luce che ricevete è stata emessa dal Sole e riflessa dalla superficie della Luna. Quanto vale il tempo massimo e minimo che la luce impiega per percorrere il tragitto Sole - Luna Piena - Terra? Si trascurino gli effetti dovuti all'inclinazione dell'orbita della Luna rispetto all'eclittica e alle dimensioni dei corpi.

Soluzione.

Poiché le orbite non sono circolari, il tempo minimo $\boldsymbol{T_{MIN}}$ si avrà con la Terra al perielio e la Luna Piena al perigeo, mentre il tempo massimo $\boldsymbol{T_{MAX}}$ si avrà con la Terra all'afelio e la Luna all'apogeo. Indichiamo con $\boldsymbol{a_T}$ ed $\boldsymbol{e_T}$ il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'orbita della Terra e con $\boldsymbol{a_L}$ ed $\boldsymbol{e_L}$ il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'orbita della Luna. Indichiamo con $\boldsymbol{D_{T\odot-A}}$ e $\boldsymbol{D_{T\odot-P}}$ le distanze della Terra dal Sole all'afelio e al perielio e con $\boldsymbol{D_{LT-A}}$ e con $\boldsymbol{D_{LT-P}}$ le distanze della Luna dalla Terra all'apogeo e al perigeo. Si ha:

$$D_{T\odot-A} = a_T\,(1+\ e_T) \simeq 149.6\ \cdot\ 10^6\ km\ \cdot 1.01673 \simeq 152.1\ \cdot 10^6\ km$$

$$D_{T\odot-P} = a_T\,(1-\ e_T) \simeq 149.6\ \cdot\ 10^6\ km\ \cdot 0.9833 \simeq 147.1\ \cdot 10^6\ km$$

$$D_{LT-A} = a_L\,(1+\ e_L) \simeq 384.4\ \cdot\ 10^3\ km\ \cdot 1.05490 \simeq 405.5\ \cdot 10^3\ km$$

$$D_{LT-P} = a_L\,(1-\ e_L) \simeq 384.4\ \cdot\ 10^3\ km\ \cdot 0.9451 \simeq 363.3\ \cdot 10^3\ km$$

Le distanze massima $\boldsymbol{D_{MAX}}$ e minima $\boldsymbol{D_{MIN}}$ che la luce dovrà percorrere varranno quindi:

$$D_{MAX} = D_{T\odot-A} + 2\ \cdot\ D_{LT-A} \simeq 152.1\ \cdot\ 10^6\ km + 811.0\ \cdot 10^3\ km \simeq 152.9\ \cdot 10^6\ km$$

$$D_{MIN} = D_{T\odot-P} + 2\ \cdot D_{LT-P} \simeq 147.1\ \cdot\ 10^6\ km + 726.6\ \cdot 10^3\ km \simeq 148.8\ \cdot 10^6\ km$$

e impiegherà un tempo massimo $\boldsymbol{T_{MAX}}$ e minimo $\boldsymbol{T_{MIN}}$ pari a:

$$T_{MAX} = \frac{D_{MAX}}{c} \simeq \frac{152.9\ \cdot 10^6\ km}{299792\ \frac{km}{s}} \simeq 510.0\ s = 8m\ 30\ s$$

$$T_{MIN} = \frac{D_{MIN}}{c} \simeq \frac{148.8\ \cdot 10^6\ km}{299792\ \frac{km}{s}} \simeq 496.3\ s = 8m\ 16.3\ s$$

Problema 8

Calcolate il periodo di rivoluzione di un corpo che si muove su una traiettoria circolare che sfiora la superficie del Sole.

Soluzione.

Il semiasse maggiore **a** dell'orbita circolare del corpo coincide con il raggio del Sole $\boldsymbol{R_\odot}$. Dalla III Legge di Keplero, poiché il corpo orbita attorno al Sole, detto **T** il suo periodo di rivoluzione si ha:

$$T^2\ (anni) = \ a^3\ (UA)$$

Il valore del raggio del Sole in UA $\boldsymbol{R_{\odot - UA}}$ è:

$$R_{\odot - UA} = \frac{\boldsymbol{R_\odot}}{1\ UA} \simeq \frac{6.955 \cdot 10^5\ km}{149.6 \cdot 10^6\ km} \simeq 4.649 \cdot 10^{-3}$$

Avremo quindi:

$$T = \sqrt{\boldsymbol{R_{\odot - UA}}^{\ 3}} \simeq \sqrt{1.005 \cdot 10^{-7}} \simeq 3.170 \cdot 10^{-4} anni \simeq 2h\ 46.7\ m$$

Problema 9

Si determini la velocità di rotazione all'equatore del pianeta Venere intorno al proprio asse.

Soluzione.

Detto **R** il raggio di Venere e **T** il suo periodo di rotazione, la velocità di rotazione all'equatore **v** si ottiene dalla relazione:

$$v = \frac{2\,\pi\,R}{T}$$

Venere (unico caso nel Sistema Solare insieme a Urano) ha una rotazione retrograda (da ovest verso est), per cui il periodo viene indicato con segno negativo.

Avremo quindi:

$$v = \frac{2\,\pi\,R}{T} \simeq \frac{2\,\pi\,\cdot\,6052\,km}{-20998\,\cdot\,10^3\,s} \simeq -1.811\,\cdot\,10^{-3}\,\frac{km}{s} = -1.811\,\frac{m}{s}$$

Problema 10

Il Sistema solare si muove nella direzione corrispondente a un punto nella costellazione di Ercole, alla velocità di 19.5 km/s. Quale distanza, in Unità Astronomiche, esso percorre in un anno?

Soluzione.

Detta **D** la distanza percorsa alla velocità **d** e **T** il tempo, avremo in modulo:

$$D = v \cdot T \simeq 19.5 \frac{km}{s} \cdot 365.26 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \simeq 6.15 \cdot 10^8\, km$$

Questa distanza in Unità Astronomiche D_{UA} vale:

$$D_{UA} = \frac{D}{UA} \simeq \frac{6.15 \cdot 10^8\, km}{149.6 \cdot 10^6\, km} \simeq 4.11\, UA$$

Problema 11

Schematizzando la Galassia come un disco uniforme di 10^5 anni luce di diametro e spessore trascurabile, si fornisca una stima della sua massa totale in masse solari, sapendo che il Sole si trova a una distanza dal centro di circa 8.34 kpc e assumendo per l'anno galattico una durata di $233 \cdot 10^6$ anni terrestri. Stimate infine la velocità di fuga dalla Galassia a una distanza dal centro pari al doppio del suo diametro.

Soluzione.

L'anno galattico **T** vale:

$$\mathbf{T} \simeq 233 \cdot 10^6 \cdot 365.26 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \simeq 7.35 \cdot 10^{15}\,\mathrm{s}$$

dalla III Legge di Keplero, la massa $\mathbf{M_g}$ della Galassia entro una distanza **a** di 8.34 kpc ($\simeq 2.57 \cdot 10^{20}$ m) dal centro vale:

$$\mathrm{M_g} = \frac{4\,\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2} \simeq \frac{39.48 \cdot 1.70 \cdot 10^{61}\, m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 5.41 \cdot 10^{31}\, s^2} \simeq 1.86 \cdot 10^{41}\,\mathrm{kg} \simeq 93.5 \cdot 10^9\, \mathrm{M}_\odot$$

Per ottenere la massa totale della Galassia $\mathbf{M_{Galassia}}$, dobbiamo considerare che, nell'approssimazione fatta di disco uniforme, la massa è proporzionale all'area del disco su cui è distribuita. Il raggio **R** della Via Lattea è di circa 50000 anni luce $\simeq$ 15.3 kpc, per cui:

$$\mathrm{M_{Galassia}} : \pi\, R^2 = \mathrm{M_g} : \pi\, a^2$$

$$\mathrm{M_{Galalssia}} \simeq \mathrm{M_g} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \simeq 1.86 \cdot 10^{41}\mathrm{kg} \left(\frac{15.3}{8.34}\right)^2 \simeq 6.26 \cdot 10^{41}\mathrm{kg} \simeq 315 \cdot 10^9\, \mathrm{M}_\odot$$

La velocità di fuga $\mathbf{v_f}$ a una distanza **D** dal centro di un corpo di massa **M** è data dalla relazione:

$$\mathrm{v_f} = \sqrt{\frac{2GM}{D}}$$

quindi:

$$\mathrm{v_f} = \sqrt{\frac{2\, G\, M_{Galassia}}{4R}} \simeq \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 6.28 \cdot 10^{41}\mathrm{kg}}{1.89 \cdot 10^{21}\ \mathrm{m}}} \simeq 210 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 210\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$