XIX OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA

Gara Interregionale – 7 maggio 2021

Categoria Senior

1. Perielio e afelio

Calcolate l'eccentricità dell'orbita di un asteroide la cui distanza all'afelio supera del 20 % la sua distanza al perielio.

Soluzione

Detto **a** il semiasse maggiore dell'orbita dell'asteroide, le relazioni che legano le distanze all'afelio e al perielio (**d_a** e **d_p**) con l'eccentricità (**e**) dell'orbita sono:

$$d_a = a\,(1 + e)\,,$$

$$d_p = a\,(1 - e)\,.$$

Se la distanza all'afelio supera del 20% quella al perielio avremo:

$$d_a = d_p + 0.20\; d_p = 1.20\; d_p$$

e quindi:

$$a\,(1 + e) = 1.20\; a\,(1 - e)$$

$$(1 + e) = 1.20\,(1 - e)$$

$$1 + e = 1.20 - 1.20\; e$$

$$2.20\; e = 0.20$$

$$e = \frac{0.20}{2.20} = 0.09\,.$$

2. The Martian

Mark Watney, "The Martian" nel film di Ridley Scott del 2015, da solo su Marte, sta contemplando Phobos, uno dei due satelliti del pianeta che, diversamente da tutti gli altri astri, sorge a ovest e tramonta a est per poi sorgere di nuovo a ovest 11.1 ore dopo la precedente levata.

1. Spiegate questo insolito comportamento di Phobos, sapendo che tra periodo sinodico di Phobos osservato da Marte (S), periodo orbitale di Phobos (P) e periodo di rotazione di Marte (M) vale la relazione: $\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{M}$.
2. Assumete l'orbita di Phobos circolare e determinate la sua distanza dalla superficie di Marte.

Soluzione

1. Il tempo (**S**) che intercorre tra due levate consecutive di Phobos è pari al suo periodo sinodico osservato dalla superficie di Marte. Detto allora **M** il periodo di rotazione di Marte, possiamo ricavare il periodo di rivoluzione (o periodo orbitale) di Phobos (**P**) dalla relazione fornita:

   $$\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{M} \qquad \text{da cui} \qquad \frac{1}{P} = \frac{1}{S} + \frac{1}{M}$$

   e quindi:

   $$P = \frac{S\,\cdot M}{S + P} \simeq \frac{11.1\ h\ \cdot\ 24.62\ h}{11.1\ h + 24.62\ h} \simeq 7.65\ h\ \simeq 7\ h\ 39\ m \simeq 459\ m\ \simeq 27.5\ \cdot 10^3\ s\,.$$

   Il periodo di rivoluzione di Phobos attorno a Marte è minore del periodo di rotazione di Marte e questo spiega perché Phobos, osservato da Marte, sorge a ovest e tramonta a est.

2. Detta **M_M** la massa di Marte, dal periodo di rivoluzione di Phobos possiamo ricavare il raggio della sua orbita (**R_{Ph}**):

$$R_{Ph} = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_M \cdot P^2}{4\pi^2}} \simeq \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 6.417 \cdot 10^{23}\ kg \cdot 75.6 \cdot 10^7\ s}{4\pi^2}} \simeq 93.6 \cdot 10^5\ m \simeq 9360\ km\,.$$

Da cui sottraendo il raggio di Marte (**R_M**), si ottiene che Phobos orbita a una quota **H** dal suolo marziano pari a:

$$H = R_{PH} - R_M \simeq 5960\ km\,.$$

3. Mi passi Hubble che voglio vedere il LEM?

Il telescopio spaziale Hubble (HST) orbita a 540 km di altezza sulla superficie terrestre e ha uno specchio primario di 2.40 m di diametro. Calcolate la sua risoluzione angolare alla lunghezza d'onda di 550 nm. Potrebbe HST riuscire a distinguere la base del modulo di discesa (LEM) abbandonato sulla Luna alla partenza degli astronauti dell'Apollo 11? La base del LEM ha un diametro di 4.27 m.

Soluzione

In assenza di atmosfera, per un telescopio con specchio primario con diametro **D**, la risoluzione angolare (**θ_{HST}**) alla lunghezza d'onda λ è data dal limite di diffrazione dello specchio primario e, espressa in radianti (rad) o in secondi d'arco ("), vale rispettivamente:

$$\theta_{HST}(rad) = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D} = 1.22 \cdot \frac{550 \cdot 10^{-9}\ m}{2.40\ m} \simeq 2.80 \cdot 10^{-7}\ rad\,,$$

$$\theta_{HST}('') = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D} \cdot 206265 = 1.22 \cdot \frac{550 \cdot 10^{-9}\ m}{2.40\ m} \cdot 206265 \simeq 0.0577\,''\,.$$

Le condizioni più favorevoli per l'osservazione si hanno quando la distanza di HST dalla superficie lunare è minima, ovvero quando la Luna è al perigeo e HST si trova sulla retta che unisce il centro della Luna e il centro della Terra. In queste condizioni, detti **D_{LP}** la distanza della Luna al perigeo, **R_T** il raggio della Terra, **R_L** il raggio della Luna e **h_{HST}** l'altezza di HST sulla superficie della Terra, il diametro (**B**) della base del LEM è visto da HST sotto un angolo (**θ_{LEM}**) pari a:

$$\theta_{LEM} = \text{arctg}\, \frac{B}{D_{LP} - R_T - R_L - h_{HST}}\,.$$

Detti **a_{Luna}** il semiasse maggiore dell'orbita della Luna e **e_{Luna}** l'eccentricità dell'orbita lunare:

$$D_{LP} = a_{Luna}\,(1 - e_{Luna}) \simeq 363.3 \cdot 10^3\ km$$

da cui:

$$\theta_{LEM} \simeq \text{arctg}\, \frac{4.27 \cdot 10^{-3}\ km}{354.6 \cdot 10^3\ km} \simeq 0.0025''.$$

Poiché

$$\theta_{HST}('') > \theta_{LEM}$$

l'Hubble Space Telescope, posto in orbita attorno alla Terra, non può risolvere la base del LEM sulla superficie della Luna.

4. Una cometa in fuga?

Una cometa, osservata in opposizione, si trova sul piano dell'eclittica a una distanza dal nostro pianeta pari a 2.40 UA. La cometa si allontana dal Sole, rimanendo sul piano dell'eclittica, con una velocità di 24.0 ± 0.5 km/s. Determinate se si tratta di una cometa periodica, oppure di una cometa che abbandonerà il Sistema Solare. Considerate solo la gravità del Sole, trascurando le possibili interazioni con gli altri corpi del Sistema Solare. Assumete l'orbita della Terra circolare.

Soluzione

Poiché al momento dell'osservazione la cometa è in opposizione e si trova sul piano dell'eclittica, la sua distanza (**D**) dal Sole vale:

$$D = 2.40\ \mathrm{UA} + 1\ \mathrm{UA} = 3.40\ \mathrm{UA}\ \simeq 509\ \cdot\ 10^6\ \mathrm{km}\,.$$

Per capire se è una cometa periodica, cioè gravitazionalmente legata al Sole, oppure una cometa che sta abbandonando il Sistema Solare è sufficiente calcolare il valore (**v_f**) della seconda velocità cosmica (o velocità di fuga) alla distanza D dal Sole. Detta $\mathbf{M_\odot}$ la massa del Sole avremo:

$$v_f = \sqrt{\frac{2\,G \cdot M_\odot}{D}} \simeq \sqrt{\frac{2\ \cdot\ 6.674\ \cdot\ 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2}\ \cdot 1.989\ \cdot\ 10^{30}\ kg}{509\ \cdot\ 10^9\ m}} \simeq 22.8\ \cdot\ 10^3\ \frac{m}{s} \simeq 22.8\ \frac{km}{s}\,.$$

Considerando l'errore sperimentale, il valore minimo $\mathbf{v_{min}}$ della velocità della cometa è:

$$v_{min} = 24.0\ \frac{km}{s} - 0.5\ \frac{km}{s} = 23.5\ \frac{km}{s}\,.$$

Poiché risulta

$$v_{min} > v_f$$

possiamo concludere che la cometa è destinata ad abbandonare il Sistema Solare.

5. Come leggere sulla Luna

Gli astronauti della missione Apollo 35, allunati nel Mare della Tranquillità, devono leggere le istruzioni per il rientro sulla Terra, quando improvvisamente si guastano tutte le luci della cabina e non ci sono sorgenti di luce artificiale disponibili. Il Sole sorgerà tra poco più di 7 giorni terrestri, quando la riserva di ossigeno si sarà esaurita. Quale sorgente di luce naturale potrebbero immediatamente usare per leggere? Assumete che la magnitudine apparente di una sorgente che consente di leggere deve essere almeno m = –12. La Luna è in apogeo, il suo periodo sinodico è di circa 29.5 giorni.

Soluzione

La sorgente di luce naturale che gli astronauti possono utilizzare per leggere sulla Luna è la Terra, che riflette la luce del Sole. Sappiamo infatti che nella posizione in cui si trovano gli astronauti il Sole sorgerà tra circa 7 giorni e poiché il periodo sinodico della Luna è di 29.5 giorni, questo significa che in quel momento il Sole si trova in direzione opposta alla Terra: la Luna, osservata dalla Terra, è all'incirca nella fase di Luna nuova e la Terra, osservata dalla Luna, è nella fase di Terra piena.

La posizione della Terra osservata dalla Luna è, a meno del fenomeno delle librazioni, fissa nel cielo. Il Mare della Tranquillità, sede del primo allunaggio (Apollo 11), si trova quasi al centro della faccia della Luna visibile dalla Terra e questo assicura che da quella regione la Terra sia sempre visibile nel cielo.

Occorre adesso verificare che la Terra piena abbia una magnitudine apparente sufficiente per permettere la lettura.

Detti $\mathbf{F_{ST}}$ il flusso luminoso del Sole (in luce visibile) alla distanza della Terra e $\mathbf{R_T}$ il raggio della Terra, la potenza luminosa $\mathbf{L_{ST}}$ intercettata dalla Terra è:

$$L_{ST} = F_{ST} \cdot \pi\, R_T^2\,.$$

Una frazione **a** (detta albedo) di questa potenza viene riflessa dalla Terra e diffusa nuovamente verso lo spazio, in tutte le direzioni. La potenza luminosa $\mathbf{L_T}$ riflessa dalla Terra è quindi:

$$L_T = a \cdot L_{ST} = a \cdot F_{ST} \cdot \pi\, R_T^2\,.$$

Questa potenza riflessa si distribuisce su semisfere concentriche (perché è riflessa da una sola faccia della Terra) sempre più grandi e a una distanza della Luna $\mathbf{D_{TL}}$ corrisponde a un flusso luminoso $\mathbf{F_{TL}}$ pari a:

$$F_{TL} = \frac{L_T}{2\pi \cdot D_{TL}^2}\,.$$

Poiché la Luna si trova all'apogeo, detti $\mathbf{e_L}$ l'eccentricità e $\mathbf{a_L}$ il semiasse maggiore dell'orbita lunare si ha:

$$D_{TL} = a_L\,(1 + e_L) \simeq 384.4 \cdot 10^3\ \text{km}\,(1 + 0.0549) \simeq 405.5 \cdot 10^3\ \text{km}\,.$$

Avendo a disposizione i due flussi, possiamo scrivere la differenza tra la magnitudine della Terra osservata dalla Luna (**m_{TL}**) e la magnitudine visuale del Sole (**m_S**) osservato dalla Terra (riportata in tabella):

$$m_{TL} - m_S = -2.5 \log \frac{F_{TL}}{F_{ST}} = -2.5 \log \frac{L_T}{2\pi \cdot D_{TL}^2 \cdot F_{ST}} = -\,2.5 \log \frac{a \cdot F_{ST} \cdot \pi\, R_T^2}{2\pi \cdot D_{TL}^2 \cdot F_{ST}} = -2.5 \log \frac{a \cdot R_T^2}{2 \cdot D_{TL}^2}$$

da cui:

$$m_{TL} = m_S - 2.5 \log \frac{a}{2} + 5 \log \frac{D_{TL}}{R_T} \simeq -26.74 - 2.5 \log \frac{0.37}{2} + 5 \log \frac{405.5 \cdot 10^3\ \text{km}}{6378\ \text{km}} \simeq -16\,.$$

Siccome la magnitudine minima per la lettura è $m = -12$, sulla Luna si riesce a leggere alla luce della Terra piena senza nessun problema.