XIX Olimpiadi Italiane di Astronomia

Corso di preparazione alla Gara Interregionale

Categoria Senior – Lezione 1

Problema 1

Proprietà delle potenze e cifre significative per somme, prodotti e quozienti

$10^3 \cdot 10^5 = 10^8$

$(10^3)^3 = 10^9$

$10^8 + 10^2 \simeq 10^8$ (in quanto 10^2 è trascurabile rispetto a 10^8)

$\frac{10^{20}}{10^{-11} \cdot 10^{24}} = 10^{20-(-11+24)} = 10^7$

$25.764 + 113.22 = 138.98$

$2.347 + 3.15 \simeq 5.50$

$3.2576 \cdot 10^3 + 1.1322 \cdot 10^2 = 3.3708 \cdot 10^3$

$3.567 \cdot 10^3 \cdot 2.56 \cdot 10^4 \simeq 9.13 \cdot 10^7$

$\frac{25.764}{113.22} \simeq 0.22756 = 2.2756 \cdot 10^{-1}$

$\frac{25.764}{13.22} \simeq 1.949$

$\frac{3.274 \cdot 10^5}{2.22 \cdot 10^2} \simeq 1.47 \cdot 10^3$

Problema 2

Considerate un'ellisse con semiassi **a** = 7.02 UA e **b** = 5.52 UA. Calcolate l'eccentricità dell'ellisse e la distanza tra i due fuochi.

Soluzione

$$\mathbf{e} = \sqrt{1-\left(\frac{b^2}{a^2}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{30.5\ UA^2}{49.3\ UA^2}\right)} = \sqrt{1 - 0.619} = 0.617$$

$$\mathbf{D = 2c} = 2\sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{49.3\ UA^2 - 30.5\ UA^2} = 8.67\ UA$$

Problema 3

Può una cometa avere un periodo di rivoluzione di un anno e una distanza all'afelio maggiore di quella media di Marte? Se sì, ricavare il valore minimo dell'eccentricità dell'orbita.

Soluzione:

Il periodo di rivoluzione T della cometa è pari a un anno; per calcolare il semiasse maggiore a_{cometa} dell'orbita della cometa utilizziamo quindi la formula:

$$a_{cometa} = \sqrt[3]{T^2} = 1\ UA$$

Dai dati forniti nella Tabella vediamo che il semiasse maggiore dell'orbita di Marte vale:

$$a_{Marte} \simeq 1.523\ UA$$

Detta **e** l'eccentricità dell'orbita, la distanza di un corpo all'afelio è data dalla relazione:

$$D_{afelio} = a\ (1+e)$$

Quindi affinché la cometa abbia una distanza all'afelio maggiore di quella media di Marte deve essere:

$$a_{cometa}\ (1+e) = 1\ \mathrm{UA}\ (1+\mathrm{e}) > 1.523\ UA$$

da cui:

$$(1+e) > 1.523$$

e infine:

$$e > 1.523 - 1$$

$$e > 0.523$$

Problema 4

Un satellite artificiale orbita attorno alla Terra su un'orbita ellittica con semiassi maggiore e minore: $\boldsymbol{a} = 15.22 \cdot 10^3\ km$ e $\boldsymbol{b} = 13.21 \cdot 10^3\ km$. Calcolate la distanza minima del satellite al perigeo e all'apogeo rispetto alla superficie della Terra e il suo periodo di rivoluzione.

Soluzione

L'eccentricità **e** dell'orbita del satellite è data dalla relazione:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} \simeq \sqrt{1 - \left(\frac{174.5 \cdot 10^6\ km^2}{231.6 \cdot 10^6\ km^2}\right)} \simeq 0.4965$$

La distanza del satellite dal centro della Terra al perigeo $\mathbf{D_P}$ e all'apogeo $\mathbf{D_A}$ vale quindi:

$$D_P = a\,(1 - e) \simeq 7663\ \mathrm{km} \qquad\qquad D_A = a\,(1 + e) \simeq 227.8\ \cdot 10^2\ \mathrm{km}$$

La distanza minima di un satellite dalla superficie terrestre si ha quando un osservatore lo vede transitare allo zenith. Quindi per ottenere la distanza minima nei due casi ($\mathbf{H_P}$ e $\mathbf{H_A}$) basta sottrarre il raggio della Terra alle distanze all'afelio e al perielio:

$$H_P = D_p - R_T \simeq 1285\ km \qquad\qquad H_A = D_A - R_T \simeq 164.0\ \cdot 10^2\ km$$

Applicando la III legge di Keplero generalizzata e considerando che la massa del satellite è ovviamente trascurabile rispetto a quella della Terra, il periodo di rivoluzione **T** è dato da:

$$T = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 \cdot\ a^3}{G\ \cdot\ M_T}} \simeq$$

$$\sqrt{\frac{39.48 \cdot 3.526 \cdot 10^{21}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}} \simeq \sqrt{3.493\ \cdot\ 10^8\ s^2} \simeq 1.869 \cdot\ 10^4\ s \simeq 311.5\ minuti\ \simeq 5\ h\ \ 12\ minuti$$

Problema 5
La Stazione Spaziale Internazionale (ISS) orbita intorno alla Terra a un'altezza media h=412 km. Calcolate il suo periodo di rivoluzione. Supponete di mettere in orbita la ISS alla stessa altezza dal suolo attorno al pianeta Mercurio. Quanto varrebbe il suo periodo di rivoluzione?

Soluzione

Otteniamo il periodo di rivoluzione attorno alla Terra, $\mathbf{P_{ISS-Terra}}$, dalla III legge di Keplero generalizzata trascurando la massa della ISS:

$$P_{ISS-Terra} = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 \cdot (R_{Terra} + h)^3}{G \cdot M_{Terra}}} \simeq \sqrt{\frac{39.48 \cdot 3.13 \cdot 10^{20}\,m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\,kg}} \simeq \sqrt{31.0 \cdot 10^6\,s^2}$$

$$\simeq 5570\,s \simeq 92.8\,minuti \simeq 1h\,33m$$

Ponendo la ISS alla stessa altezza dal suolo attorno a Mercurio, il periodo $\mathbf{P_{ISS-\mathit{Mercurio}}}$ sarebbe:

$$P_{ISS-Mercurio} = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 \cdot (R_{Mercurio} + h)^3}{G \cdot M_{Mercurio}}} \simeq \sqrt{\frac{39.48 \cdot 2.32 \cdot 10^{19}\,m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 3.301 \cdot 10^{23}\,kg}} \simeq \sqrt{41.6 \cdot 10^6\,s^2}$$

$$\simeq 6450\,s \simeq 107m \simeq 1h\,47m$$

Il periodo sarebbe quindi più lungo anche se l'orbita sarebbe più corta, questo perché Mercurio ha una massa molto minore di quella della Terra.

Problema 6

Calcolate il minimo periodo di rivoluzione di un corpo di piccola massa che si muove su un'orbita circolare attorno a una nana bianca (WD) che ha raggio pari a quello della Terra. A che frazione della velocità della luce si muove il corpo? Nota: nella soluzione si tenga conto che il massimo valore possibile per la massa di una WD è pari a 1.44 volte quella del Sole.

Soluzione

Il periodo di rivoluzione **T** di un corpo di massa trascurabile in orbita ad una distanza **a** intorno a una stella di massa **M** vale:

$$\mathrm{T} = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot a^3}{G \cdot M}}$$

Il valore minimo del periodo T_{MIN} si ha quando il raggio dell'orbita è minimo (poiché si trova al numeratore), e quando la massa della nana bianca è massima (poiché si trova al denominatore). Il raggio minimo dell'orbita è pari al raggio della nana bianca: **a** = $R_{WD} = R_{TERRA}$, mentre dalla teoria dell'evoluzione stellare (vedi nota nel testo) sappiamo essere: $M_{WD\ (max)} = 1.44\ M_{\odot}$. Avremo quindi:

$$T_{MIN} \simeq \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 2.595 \cdot 10^{20}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 1.44 \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\ kg}} \simeq 7.32\ s$$

La lunghezza **C** dell'orbita del corpo è: $C = 2\ \pi\ R_{Terra} \simeq 40074$ km, la sua velocità vale quindi:

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{T}} \simeq \frac{40074\ \mathrm{km}}{7.32\ s} \simeq 5.47 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \simeq 0.0183\ c = 1.83 \cdot 10^{-2}\ c$$

Problema 7

Un asteroide ha un raggio di 200 km e la sua densità media è pari a quella di Mercurio. Calcolate il valore dell'accelerazione di gravità alla superficie dell'asteroide in $\frac{m}{s^2}$

Soluzione

La massa **M** di un corpo, nota la sua densità media **ϱ** e il volume **V** vale: $M = \rho V$

Per un corpo sferico di raggio **R** si ha: $M = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$

Il problema si può risolvere calcolando la densità di Mercurio dai dati nella Tabella e inserendo il valore ottenuto nella formula per il calcolo della massa dell'asteroide. Tuttavia esiste una soluzione più «veloce»

Detti $\mathbf{R_a}$ e $\mathbf{R_M}$ i raggi dell'asteroide e di Mercurio, consideriamo il rapporto tra la massa dell'asteroide $\mathbf{M_a}$ e quella di Mercurio $\mathbf{M_M}$:

$$\frac{M_a}{M_M} = \frac{\rho_a \ \frac{4}{3} \pi R_a{}^3}{\rho_M \ \frac{4}{3} \pi R_M{}^3}$$

Poiché le densità dei due corpi sono uguali avremo infine:

$$M_a = M_M \left(\frac{R_a}{R_M}\right)^3 \simeq 3.301 \cdot 10^{23} kg \left(\frac{200\ km}{2440\ km}\right)^3 \simeq 3.301 \cdot 10^{23} kg \cdot 5.51 \cdot 10^{-4} \simeq 1.82 \cdot 10^{20} kg$$

Nota la massa possiamo calcolare l'accelerazione di gravità $\mathbf{g_a}$ sulla superficie dell'asteroide

$$g_a = \frac{G \cdot M_a}{R_a{}^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 1.82 \cdot 10^{20}\ kg}{(200 \cdot 10^3\ m)^2} \simeq 0.304 \ \frac{m}{s^2}$$

Problema 8

Un pianeta di massa $1.6 \cdot 10^{26}$ kg si muove attorno a una stella su un'orbita il cui semiasse maggiore è di 9.00 UA con un periodo di 20.0 anni. Trovare la massa (in kg e in unità di masse solari) e il raggio (in km e in unità del raggio solare) della stella, sapendo che l'accelerazione di gravità sulla sua fotosfera è 54 volte quella sulla superficie della Terra.

Soluzione

Trascurando la massa del pianeta (vedere nota) ricaviamo la massa della stella dalla III legge di Keplero:

$$\mathrm{M_{stella}} = \frac{4\,\pi^2\,\mathrm{a}^3}{\mathrm{G\,T}^2} \simeq \frac{39.48\ \cdot 2.44\ \cdot 10^{36}\ m^3}{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\ s^2}\ \cdot 3.98\ \cdot\ 10^{17}\ s^2} \simeq 3.63\ \cdot\ 10^{30}\ kg \simeq 1.82\ M_{Sole}$$

Possiamo ricavare il raggio della stella $\mathbf{R_{stella}}$ dalla relazione $\mathrm{g} = \frac{\mathrm{G}\cdot\mathrm{M}}{\mathrm{R}^2}$ ponendo $\mathrm{g_{stella}} = 54\ \mathrm{g_{Terra}}$:

$$R_{stella} = \sqrt{\frac{G\ \cdot M_{stella}}{54\ \cdot\ g_{Terra}}} \simeq \sqrt{\frac{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\ s^2}\ \cdot\ 3.63\ \cdot\ 10^{30}\ kg}{54\ \cdot 9.807\ \frac{m}{s^2}}} \simeq\ 6.76\ \cdot\ 10^{5}\ km \simeq 0.973\ R_{Sole}$$

Nota: l'assunzione iniziale $\mathrm{M_{pianeta}}$ trascurabile rispetto a quella, non ancora nota, della stella, risulta giustificata in quanto sappiamo, dallo studio della struttura ed evoluzione stellare, che la massa minima di una stella è: $\mathrm{M_{minima\ stella}} \geq 0.08\ \cdot \mathrm{M_{Sole}}\ \simeq\ 1.59\ \cdot\ 10^{29}\ \mathrm{kg}\ \simeq 1000\ \cdot \mathrm{M_{pianeta}}$

Problema 9

Sulla Terra, quanto dovrebbe durare un giorno siderale (in hh:mm:ss) affinché un corpo posto all'equatore risulti privo di peso?

Soluzione

Affinché in un sistema di riferimento solidale con la Terra un corpo risulti privo di peso, la somma dell'accelerazione di gravità $\mathbf{a_g}$ e di quella centrifuga $\mathbf{a_c}$ deve essere pari a zero. All'equatore le due accelerazioni hanno stessa direzione, ma verso opposto.

Si avrà equilibrio quando: $\mathbf{a_c} = -\mathbf{a_g}$.

Quindi, dette $\mathbf{v}$ la velocità tangenziale, $\mathbf{M_T}$ e $\mathbf{R_T}$ massa e raggio della Terra, $\mathbf{m}$ la massa del corpo e considerando il modulo dei vettori deve essere:

$$m\,\frac{v^2}{R_T} = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T^2}$$

E poiché, detto $\mathbf{T}$ il periodo di rotazione, si ha: $v = \frac{2\,\pi\,R_T}{T}$, avremo:

$$\frac{4\,\pi^2 {R_T}^2}{T^2 R_T} = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2}$$

possiamo ricavare la durata che dovrebbe avere il giorno:

$$T = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 \cdot R_T^3}{G \cdot M_T}} \simeq \sqrt{\frac{39.48 \cdot 2.594 \cdot 10^{20}\,m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\,kg}} \simeq 5069\,s \simeq 1h\,24m\,29s$$

Problema 10

Calcolate il peso di un corpo di massa M = 100 kg all'equatore di Mercurio e all'equatore di Saturno, considerando l'effetto della forza centrifuga dovuta alla rotazione. Il periodo di rotazione dei due pianeti è, rispettivamente, di 1407.5 h e 10h 33m. Poiché Saturno non ha una superficie solida, si assuma come distanza dal centro il raggio medio del pianeta.

Soluzione

Detta **g** l'accelerazione di gravità, il peso **P** di un corpo è la forza di gravità tra corpo e pianeta: P = m g

Dalla relazione: $g = \frac{G \cdot M}{R^2}$ l'accelerazione di gravità alla superficie di Mercurio $\boldsymbol{g_M}$ e di Saturno $\boldsymbol{g_S}$ vale:

$$g_M = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 3.301 \cdot 10^{23}\, kg}{(2440 \cdot 10^3\, m)^2} \simeq 3.700\ \frac{m}{s^2} \qquad g_S = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 5.685 \cdot 10^{26}\, kg}{(60267 \cdot 10^3\, m)^2} \simeq 10.45\ \frac{m}{s^2}$$

In assenza di rotazione il peso del corpo sarà quindi: $P_M \simeq 370$ N $\quad P_S \simeq 1045$ N

Detti **T** il periodo di rotazione e **R** il raggio di un pianeta, la forza centrifuga, data dalla relazione:

$$F_c = m\,\frac{v^2}{R} = m\,\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R}{T^2} \quad \left(\text{essendo} \quad v = \frac{2\,\pi\,R}{T}\right)$$

all'equatore è diretta in senso opposto alla gravità e rende minore il peso del corpo. Per i due pianeti avremo:

$$F_{cM} \simeq 100\,kg\,\frac{39.48 \cdot 2440 \cdot 10^3\, m}{25.67 \cdot 10^{12}\, s^2} \simeq 3.75 \cdot 10^{-4}\, N \qquad F_{cS} \simeq 100\,kg\,\frac{39.48 \cdot 60267 \cdot 10^3\, m}{144.2 \cdot 10^7\, s^2} \simeq 165\, N$$

Tenendo conto della rotazione il peso del corpo all'equatore sarà quindi:

$$P_{M\_rot} \simeq 370\text{ N} - 3.75 \cdot 10^{-4}\, N \simeq P_M \qquad P_S \simeq 1045\text{ N} - 165\text{ N} \simeq 880\text{ N}$$

Problema 11

Una stella di neutroni ha raggio di 15.0 km e massa pari al doppio di quella del Sole. Calcolare: la densità media della stella, l'accelerazione di gravità sulla sua superficie, la velocità di arrivo al suolo di un corpo che, partendo da fermo, cade da un'altezza h = 2 m e il tempo di caduta del corpo. Calcolare inoltre il peso sulla superficie della Terra di 1 cm^3 di materia della stella di neutroni e le dimensioni di un cubo di ferro (ϱ_{Fe} = 7870 kg/m^3) con la stessa massa di 1 cm^3 di materia della stella di neutroni.

Soluzione

Dette **M** la massa, **V** il volume e **R** il raggio, la densità media **ρ** della stella di neutroni è data dalla relazione:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3\,M}{4\,\pi\,R^3} \simeq \frac{3 \cdot 3.978 \cdot 10^{30}\,kg}{12.57 \cdot 3.38 \cdot 10^{12}\,m^3} \simeq 2.81 \cdot 10^{17}\,\frac{kg}{m^3} \simeq 2.81 \cdot 10^{11}\,\frac{kg}{cm^3}$$

L'accelerazione di gravità sulla superficie vale:

$$a_g = \frac{G\,M}{R^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 3.978 \cdot 10^{30}\,kg}{225 \cdot 10^6\,m^2} \simeq 1.18 \cdot 10^{12}\,\frac{m}{s^2}$$

Poiché la distanza iniziale del corpo dalla superficie è circa 1.3 · 10^{-4} il raggio della stella, possiamo considerare costante l'accelerazione di gravità lungo il percorso e calcolare la velocità di arrivo utilizzando le relazioni del moto uniformemente accelerato. La velocità di arrivo al suolo con partenza da fermo vale quindi:

$$v = \sqrt{2\,a_g\,h} \simeq \sqrt{2 \cdot 1.18\,\frac{m}{s^2} \cdot 10^{12} \cdot 2\,m} \simeq 2.17 \cdot 10^6\,\frac{m}{s} = 2.17 \cdot 10^3\,\frac{km}{s} \simeq 7 \cdot 10^{-3}\,c$$

Il tempo di caduta è dato dalla relazione:

$$t = \sqrt{\frac{2\,h}{a}} = \sqrt{\frac{4\,m}{1.18 \cdot 10^{12}\,\frac{m}{s^2}}} \simeq 1.84 \cdot 10^{-6}\,s$$

La massa $\mathbf{M_1}$ di 1 cm^3 di materia della stella di neutroni vale:

$$M_1 = V \cdot \rho \simeq 1\,cm^3 \cdot 2.81 \cdot 10^{11}\,\frac{kg}{cm^3} \simeq 2.81 \cdot 10^{11}\ \mathrm{kg}$$

Detta $\mathbf{a_{gT}}$ l'accelerazione di gravità della Terra, il peso $\mathbf{P_1}$ di $\mathbf{M_1}$ sulla superficie della Terra sarebbe:

$$P_1 = M_1\,a_{gT} \simeq 2.81 \cdot 10^{11}\ \mathrm{kg} \cdot 9.807\,\frac{m}{s^2} \simeq 2.76 \cdot 10^{12}\,N$$

Per avere una massa di ferro $M_{Fe} = 2.81 \cdot 10^{11}$ kg, avremo bisogno di un volume $\mathbf{V_{Fe}}$ pari a:

$$V_{Fe} = \frac{M_{Fe}}{\varrho_{Fe}} \simeq \frac{2.81 \cdot 10^{11}\ \mathrm{kg}}{7870\,\frac{kg}{m^3}} \simeq 3.57 \cdot 10^7\,m^3$$

e quindi di un cubo con lato **L** pari a:

$$L = \sqrt[3]{V_{Fe}} \simeq \sqrt[3]{3.57 \cdot 10^7\,m^3} \simeq 329\,m$$

Problema 12

Calcolare il periodo sinodico di Nettuno, osservato da un corpo il cui semiasse maggiore dell'orbita (intorno al Sole) vale: $a = 227.9 \cdot 10^6$ km

Soluzione

Dai dati presenti nella Tabella deduciamo che il corpo da cui è stata fatta l'osservazione è il pianeta Marte, il cui periodo siderale è: $P \simeq 686.97$ giorni $\simeq 1.8808$ anni

Detto **E** il periodo siderale di Nettuno il suo periodo sinodico **S** visto da Marte varrà quindi:

$$S = \frac{E \cdot P}{|E - P|} \simeq \frac{309.93 \ anni^2}{162.91 \ anni} \simeq 1.9025 \text{ anni} \simeq 694.89 \ giorni$$

Nota:

il valore calcolato è espresso in giorni terrestri, ma un osservatore su Marte calcolerebbe tutte le grandezze in unità (giorni o anni) marziane. Il giorno marziano è chiamato "sol"

Problema 13

Da un luogo sulla Terra osservate due opposizioni consecutive di un pianeta esterno. L'intervallo di tempo tra i due eventi è di 398.88 giorni. Di che pianeta si tratta?

Soluzione

L'intervallo tra due opposizioni consecutive è pari al periodo sinodico **S** del corpo. Detto **E** il periodo siderale della Terra e **P** il periodo siderale del pianeta vale la relazione:

$$\mathrm{P} = \frac{E \cdot S}{|\,E - S\,|} \simeq \frac{365.26\ giorni \cdot 398.88\ \text{giorni}}{33.620\ giorni} \simeq 4333.6\ giorni \simeq 11.864\ anni$$

Si tratta quindi, tenendo conto delle approssimazioni usate, del pianeta Giove.

Problema 14

Un satellite artificiale ruota attorno alla Terra, che assumiamo perfettamente sferica, su un'orbita equatoriale circolare a una distanza d = 4325 km dalla superficie. Un osservatore lo vede passare al meridiano a mezzanotte. Dopo quanto tempo lo vedrà passare nuovamente al meridiano se:

a) il satellite si muove da Ovest verso Est;

b) il satellite si muove da Est verso Ovest?

Soluzione

La distanza **D** del satellite dal centro della Terra vale: **D** = 6378 + 4325 = 10703 km

Possiamo ricavare il periodo di rivoluzione $\mathbf{T_s}$ del satellite dalla III legge di Keplero:

$$T_s = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 D^3}{G \cdot M_T}} \simeq \sqrt{\frac{39.478 \cdot 1.2261 \cdot 10^{21}\, m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\, kg}} \simeq 11020\, s \simeq 183.7\, m \simeq 3h\, 4m$$

I passaggi successivi del satellite al meridiano di un luogo avvengono a intervalli di tempo pari al suo periodo sinodico **S** riferito alla rotazione siderale della Terra $\mathbf{T_T}$ (= 23h 56m 4s = 86164 s)

a) Se il satellite si muove da Ovest verso Est, ovvero nello stesso senso della rotazione della Terra vale la relazione:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{T_s} \cdot \mathbf{T_T}}{|\,\mathbf{T_s} - \mathbf{T_T}\,|} \simeq \frac{11020\, s \cdot 86164\, s}{75140} \simeq 12640\, s \simeq 210.6\, m \simeq 3h\, 31m$$

b) Se il satellite si muove da Est verso Ovest, ovvero in direzione opposta alla rotazione della Terra vale la relazione:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{T_s} \cdot \mathbf{T_T}}{|\,\mathbf{T_s} + \mathbf{T_T}\,|} \simeq \frac{11020\, s \cdot 86164\, s}{97180} \simeq 9770\, s \simeq 162.8\, m \simeq 2h\, 43m$$

Problema 15

Per un ipotetico osservatore posto al centro della Terra calcolate le dimensioni angolari (diametro apparente) del Sole quando la Terra si trova all'afelio e quando si trova al perielio. Confrontate questi valori con quelli delle dimensioni angolari della Luna al perigeo e all'apogeo.

Soluzione

Detti $\mathbf{a_T}$ il semiasse maggiore ed $\mathbf{e_T}$ l'eccentricità dell'orbita della Terra, le distanze della Terra dal Sole all'afelio $\mathbf{d_{A\odot}}$ e al perielio $\mathbf{d_{P\odot}}$ valgono:

$$d_{A\odot} = a_T\,(1 + e_T) \simeq 152.1 \cdot 10^6\ km \qquad d_{P\odot} = a_T\,(1 - e_T) \simeq 147.1 \cdot 10^6\ km$$

Quindi, detto $\boldsymbol{R_\odot}$ il raggio del Sole, per un osservatore al centro della Terra le dimensioni angolari minime $\mathbf{D_{A\odot}}$ (Terra all'afelio) e massime $\mathbf{D_{P\odot}}$ (Terra al perielio) del Sole valgono:

$$\mathrm{D}_{\mathrm{A}\odot} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R}_\odot}{\mathrm{d}_{\mathrm{A}\odot}}\right) \simeq 31'.44 \qquad \mathrm{D}_{\mathrm{P}\odot} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R}_\odot}{\mathrm{d}_{\mathrm{P}\odot}}\right) \simeq 32'.51$$

Detti $\mathbf{a_L}$ il semiasse maggiore ed $\mathbf{e_L}$ l'eccentricità dell'orbita della Luna, le distanze della Luna dalla Terra all'apogeo $\mathbf{d_{AL}}$ e al perigeo $\mathbf{d_{PL}}$ valgono:

$$d_{AL} = a_L\,(1 + e_L) \simeq 405.7 \cdot 10^3\ km \qquad d_{PL} = a_L\,(1 - e_L) \simeq 363.1 \cdot 10^3\ km$$

Quindi, detto $\boldsymbol{R_L}$ il raggio della Luna, per un osservatore al centro della Terra le dimensioni angolari minime $\mathbf{D_{AL}}$ (Luna all'apogeo) e massime $\mathbf{D_{PL}}$ (Luna al perigeo) della Luna valgono:

$$\mathrm{D}_{AL} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R_L}}{\mathrm{d}_{AL}}\right) \simeq 29'.45 \qquad \mathrm{D}_{PL} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R_L}}{\mathrm{d}_{PL}}\right) \simeq 32'.91$$

Notiamo che quando la Luna si trova all'apogeo la sua dimensione angolare è minore di quella del Sole anche quanto la Terra è all'afelio, mentre quando la Luna si trova al perigeo la sua dimensione angolare è maggiore di quella del Sole anche quando la Terra è al perielio.