OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2020

Finale Nazionale - 18 luglio

Prova Teorica - Categoria Senior

1. Gravità artificiale

La stazione spaziale Endurance del film Interstellar, si trova nello spazio a molti anni luce di distanza dalle stelle più vicine e ruota su sé stessa a velocità costante per creare, nella sua parte più esterna, una gravità pari a un terzo di quella presente sulla superficie della Terra. Sapendo che il raggio dell'Endurance è di 298.0 m, calcolate:

1. quanti giri su sé stessa effettua ogni ora;
2. quanto vale l'accelerazione di gravità nella sala motori, posta al centro della stazione spaziale.

Soluzione:

1. L'accelerazione di gravità nella parte più esterna dell'Endurance vale

$$g_E = \frac{g_{Terra}}{3} \simeq 3.269\ \frac{m}{s^2}$$

Detti **ω** la velocità angolare, $\mathbf{V_T}$ la velocità tangenziale e **r** il raggio della stazione spaziale, l'accelerazione centrifuga $\mathbf{a_c}$ dovuta alla rotazione vale

$a_c = \omega^2 \cdot r = \frac{{V_T}^2}{r}$, da cui ricaviamo:

$$V_T = \sqrt{g_E \cdot r} \simeq \sqrt{3.269\ \frac{m}{s^2} \cdot 298.0\ m} \simeq 31.21\ \frac{m}{s}$$

Il periodo di rotazione **T** vale:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{V_T} \simeq \frac{2 \cdot \pi \cdot 298.0}{31.21} \simeq 60\ s \simeq 1\ m$$

Quindi in un'ora l'Endurance effettua un numero di giri **N** su sé stessa pari a:

$$N = \frac{3600\ s}{60\ s} = \frac{60\ m}{1\ m} = 60\ giri$$

2. Poiché la stazione spaziale è molto lontana da una qualsiasi stella, possiamo trascurare gli effetti gravitazionali delle stelle. Dalla relazione $a_c = \omega^2 \cdot r$ vediamo che a parità di velocità angolare l'accelerazione centrifuga diminuisce con il raggio. Al centro dell'Endurance $r = 0$ e avremo quindi:

$$g_E = 0$$

2. Luminosità e raggio di Sirio

Sirio è la stella più luminosa della costellazione del Cane Maggiore. Il suo spettro ha il massimo dell'emissione nel vicino UV, alla lunghezza d'onda di 2916 Å. Sapendo che Sirio ha una parallasse π = 0".379 e una magnitudine apparente visuale m = -1.46, determinate:

1. la sua luminosità in rapporto a quella del Sole;
2. il suo raggio in rapporto a quello del Sole e in km.

Soluzione:

1. Dalla parallasse di Sirio otteniamo la sua distanza:

$$d_{Sirio} = \frac{1}{\pi} \simeq \frac{1}{0''.379} \simeq 2.64\ \text{parsec}$$

Nota la distanza ricaviamo la magnitudine assoluta:

$$M_{Sirio} = m + 5 - 5 \cdot \log d_{Sirio} \simeq 1.43$$

Confrontando questo valore con quello del Sole otteniamo:

$$M_{Sole} - M_{Sirio} = -2.5 \log \frac{L_{Sole}}{L_{Sirio}}$$

e quindi:

$$L_{Sirio} = \frac{L_{Sole}}{10^{\frac{M_{Sirio} - M_{Sole}}{2.5}}} \simeq \frac{L_{Sole}}{10^{\frac{1.43 - 4.83}{2.5}}} \simeq 22.9\, L_{Sole}$$

2. Dalla legge dello spostamento di Wien possiamo ricavare la temperatura $\mathbf{T_{Sirio}}$ della fotosfera di Sirio. Poiché $\lambda_{max} \cdot T_{Sirio} = b = 2.898 \cdot 10^{-3}$ m·K, ricaviamo:

$$T_{Sirio} = \frac{b}{\lambda_{max}} \simeq \frac{2.898 \cdot 10^{-3}\, m \cdot K}{2916 \cdot 10^{-10}\, m} \simeq 9938\ K$$

Nota la temperatura di Sirio possiamo esprimere il rapporto tra le luminosità di Sirio e del Sole come:

$$\frac{L_{Sirio}}{L_{Sole}} = \frac{\pi \cdot R^2_{Sirio} \cdot \sigma \cdot T^4_{Sirio}}{\pi \cdot R^2_{Sole} \cdot \sigma \cdot T^4_{Sole}}$$

da cui ricaviamo:

$$R_{Sirio} = \frac{{T_{Sole}}^2}{{T_{Sirio}}^2} \cdot \sqrt{\frac{L_{Sirio}}{L_{Sole}}} \cdot R_{Sole} \simeq \frac{3339 \cdot 10^4\ K^2}{9876 \cdot 10^4\ K^2} \cdot \sqrt{22.9} \cdot R_{Sole} \simeq 1.62\, R_{Sole} \simeq 113 \cdot 10^4\ km$$

3. Una galassia a spirale

Per classificare correttamente una galassia a spirale da una sua immagine, occorre che il suo diametro angolare visto dalla Terra sia di almeno α = 1' e che l'angolo formato tra la direzione di osservazione e il piano della galassia sia dell'ordine di 90° (galassia osservata "di faccia"). Considerate per esempio la galassia nell'immagine a sinistra , per la quale assumete una forma circolare con un diametro medio D_G = 30.1 kpc. Sapendo che la galassia ha magnitudine assoluta integrata M_G = -21.1, calcolate:

1. la massima distanza possibile della galassia, in parsec, anni luce e km, per essere correttamente classificata;
2. la corrispondente magnitudine apparente;
3. la corrispondente magnitudine media superficiale in mag/arcsec^2.

Soluzione:

1. Il diametro medio della galassia vale:

$$D_G = 30.1 \cdot 10^3\ parsec \simeq 98.2 \cdot 10^3\ anni\ luce \simeq 9.29 \cdot 10^{17}\ km$$

La distanza **d** alla quale il diametro della galassia sottende un angolo α = 1' è dato dalla relazione:

$$d = \frac{D_G}{\tan\alpha} = \frac{D_G}{\tan 1'} \simeq 10.3 \cdot 10^7 parsec \simeq 33.8 \cdot 10^7\ anni\ luce \simeq 3.19 \cdot 10^{21}\ km$$

2. Detta $\mathbf{m_G}$ la magnitudine apparente della galassia vale la relazione:

$$m_G = M_G - 5 + 5 \log d = -21.1 - 5 + 5 \log(10.3 \cdot 10^7) \simeq 13.9$$

3. Detto $\mathbf{R_G}$ il raggio apparente della galassia, la sua area apparente $\mathbf{A_G}$ vale:

$$A_G = \pi\, {R_G}^2 = \pi\, (0'.5)^2 \simeq 0.785\ primi\ d'arco\ quadrati \simeq 2830\ secondi\ d'arco\ quadrati$$

Dalla relazione che fornisce la magnitudine integrata **m** di un oggetto esteso di area **A** nota la magnitudine superficiale $\mathbf{m_{sup}}$: $m = m_{sup} - 2.5 \log A$ ricaviamo:

$$m_{sup-G} = m_G + 2.5 \log A_G \simeq 13.9 + 2.5 \log 2830 \simeq 22.5\ mag/arcsec^2$$

4 - La prossima Luna Piena

Osservata da Perugia l'8 aprile 2020 la Luna è stata piena alle 04:36 e in quel momento la sua ascensione retta era: AR = 13h 14m. Per lo stesso osservatore calcolate:

1. la data e l'ora della Luna piena successiva a quella dell'8 aprile 2020;
2. l'ascensione retta della Luna piena successiva a quella dell'8 aprile 2020.

Considerate circolari le orbite della Terra e della Luna e trascurate la variazione della declinazione della Luna.

Soluzione:

1. La Luna piena successiva si avrà dopo un mese sinodico. La durata del mese sinodico **S**, ovvero il tempo necessario alla Luna per tornare in opposizione rispetto al Sole, si può calcolare a partire dalla durata del mese siderale della Luna (**P**) e dell'anno siderale della Terra (**E**):
$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{E} = \frac{E - P}{P \cdot E}$$
da cui:
$$S = \frac{P \cdot S}{E - P} \simeq \frac{365.26 \cdot 27.322}{365.26 - 27.322} \simeq 29.531 \text{ g} \simeq 29 \text{ g } 12 \text{ h } 45 \text{ m}$$
La data della Luna piena successiva è: 8 aprile + 29 giorni = 7 maggio, l'ora è: 04:36 + 12:45 = 17:21. Quindi la successiva Luna Piena è stata osservata il 7 maggio alle 17:21.

2. In un mese siderale la Luna percorre in cielo esattamente 24h di ascensione retta, detto **X** l'aumento di ascensione retta in un mese sinodico, vale la proporzione: P : 24h = S : X, da cui:
$$X = \frac{24\text{h} \cdot 29.531 \text{ g}}{27.322 \text{ g}} \simeq 25.940 \text{ h} = 24\text{h} + 1\text{h } 56\text{m}$$
L'ascensione retta della Luna piena del 7 maggio è quindi aumentata di 1h e 56 minuti rispetto a quella della Luna piena dell'8 aprile e valeva:
$$AR_{7 \text{ maggio}} = AR_{8 \text{ aprile}} + 1\text{h } 56\text{m} = 15\text{h } 10\text{m}$$

Nota: La durata del mese sinodico varia nel corso dell'anno da un minimo di circa 29.269 giorni a un massimo di circa 29.840 giorni, ovvero in un intervallo di circa ±7 ore rispetto alla durata media di 29.531 giorni. La Luna piena dell'8 maggio 2020 si è in realtà verificata alle 12:46 e la sua ascensione retta era di 15h 03m.

5 - Un'orbita parabolica

In meccanica celeste un'orbita parabolica, per esempio attorno al Sole, è un'orbita con eccentricità e = 1. In assenza di altre forze, un oggetto di piccola massa che si muove su un'orbita parabolica arriverà all'afelio a distanza infinita dal Sole con velocità uguale a zero. Considerando unicamente la forza di gravità dovuta al Sole, calcolate:

1. se in ogni punto dell'orbita parabolica di un corpo di piccola massa attorno al Sole la somma di energia potenziale ed energia cinetica sia maggiore, minore o uguale a zero;
2. il massimo valore possibile della velocità al perielio di una cometa che si muove attorno al Sole su un'orbita parabolica;
3. il valore della velocità della cometa sull'orbita descritta nel punto 2 alla distanza di 1 UA dal Sole.

Soluzione:

1. Applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica. Siano **M** la massa del Sole, **d** la distanza del corpo di massa **m** dal Sole e **v** la sua velocità relativa al Sole. La somma **E** dell'energia cinetica e dell'energia potenziale del corpo di massa m si conserva, ha cioè sempre lo stesso valore ed è data da:
$$E = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{d}$$
In particolare, considerando distanze e velocità all'afelio (d_A, v_A) e al perielio (d_P, v_P) avremo:
$$\frac{1}{2} m \, {v_P}^2 - G \frac{Mm}{d_P} = \frac{1}{2} m \, {v_A}^2 - G \frac{Mm}{d_A}$$
Per un'orbita parabolica il secondo membro è pari a zero, da cui deduciamo che E = 0 in ogni punto di un'orbita parabolica (Nota: se E > 0 l'orbita è iperbolica, se E < 0 l'orbita è ellittica).

2. Il massimo valore possibile di velocità al perielio si ha per un'orbita che sfiora la fotosfera del Sole:
$$\frac{1}{2} m \, {v_P}^2 - G \frac{M \cdot m}{R_{Sole}} = 0$$
Da cui ricaviamo la velocità al perielio (v_P), che vediamo essere pari alla velocità di fuga dal Sole:

$$v_P = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R_{Sole}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\ kg}{695.5 \cdot 10^6\ m}} \simeq 617.8 \cdot 10^3\ \frac{m}{s} = 617.8\ \frac{km}{s}$$

In realtà una cometa non può avvicinarsi al Sole fino a sfiorarne la fotosfera, in quanto verrebbe disintegrata dalle forze mareali. La distanza minima **d** (detta Limite di Roche o Raggio di Roche) a cui una cometa di densità $\boldsymbol{\rho_{cometa}}$ (che possiamo porre pari a 917 kg/m^3 considerandola costituita in massima parte da ghiaccio di acqua) può avvicinarsi è data dalla relazione:

$$d \approx 1.51 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{Sole}}{\rho_{cometa}}} \approx 1.51 \cdot \sqrt[3]{\frac{1.989 \cdot 10^{30}\ kg}{917\ \frac{kg}{m^3}}} \approx 195 \cdot 10^7 m$$

Da cui ricaviamo la velocità $\mathbf{v_{pr}}$ se il perielio dell'orbita parabolica coincide con il limite di Roche:

$$v_{pr} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\ kg}{195 \cdot 10^7\ m}} \simeq 369 \cdot 10^3\ \frac{m}{s} = 369\ \frac{km}{s}$$

3. Alla distanza di 1 UA dal Sole la velocità della cometa è data dalla relazione:

$$v_{UA} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{UA}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\ kg}{149.6 \cdot 10^9\ m}} \simeq 421.3 \cdot 10^2\ \frac{m}{s} = 42.13\ \frac{km}{s}$$