OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2020

Finale Nazionale - 18 luglio

Prova Teorica - Categoria Junior 2

1. Un resto di supernova

I resti di supernova offrono spesso spettacoli incredibili. Consideratene uno di forma circolare, con diametro apparente di 350 arcsec, posto a una distanza dalla Terra di 5.12 kpc.

1. Stimate il diametro reale, in parsec e in km, del resto di supernova.
2. Sapendo che la velocità di espansione, rimasta costante nel tempo, è di 2000 km/s, stimate quanti anni fa è esplosa la supernova.

Soluzione:

1. Detti **θ** il diametro angolare apparente (espresso in gradi), **L** il dimetro lineare e **D** la distanza del resto di supernova, vale la relazione:

$$L = D \cdot \tan\theta = 5.12 \cdot 10^3 \text{ pc} \cdot \tan(0°.0972) \simeq 8.69 \text{ pc} \simeq 2.68 \cdot 10^{14} \text{ km}$$

2. La distanza percorsa dal gas dal momento dell'esplosione è pari al raggio **R** del resto della supernova:

$$R = \frac{L}{2} \simeq 1.34 \cdot 10^{14} \text{ km}$$

Dividendo la distanza percorsa per la velocità **v** di espansione, otteniamo il tempo **t** trascorso dall'esplosione della supernova:

$$t = \frac{R}{v} = \frac{1.34 \cdot 10^{14} \text{ km}}{2000 \text{ km/s}} \simeq 6.70 \cdot 10^{10} \text{ s} \simeq 2120 \text{ anni}$$

2. In quale città?

Il 19 settembre 2019, data in cui l'equazione del tempo (definita come tempo solare vero meno tempo solare medio) valeva ET = +6 minuti, un osservatore in Italia ha notato che un orologio solare, perfettamente funzionante, segnava le 10:00, mentre il suo orologio da polso, perfettamente sincronizzato con l'ora civile, segnava le 11:25. Sapendo che il meridiano centrale del fuso orario dell'Italia ha longitudine $\lambda_{centrale}$ = 15° E, dire, giustificando la risposta con gli opportuni calcoli, in quale tra le seguenti città italiane si trovava l'osservatore: Lecce (λ = 18° 11' E), Catania (λ = 15° 3' E) o Aosta (λ = 7° 15' E).

Soluzione:

Detti $\mathbf{T_V}$ il tempo solare vero (misurato dall'orologio solare), $\mathbf{T_M}$ il tempo solare medio e **ET** l'equazione del tempo, vale la relazione: $T_V = T_M + ET$. Il Tempo Civile $\mathbf{T_C}$ segnato dall'orologio dell'osservatore è legato al tempo solare medio dalla relazione: $T_M = T_C \pm \lambda$, dove la longitudine λ dell'osservatore ha segno positivo se l'osservatore è a est del meridiano centrale e segno negativo se l'osservatore è a ovest del meridiano centrale. Inoltre nella data indicata era in vigore l'ora legale (ΔT = +1h), che porta un'ora avanti l'ora civile rispetto a quella solare. Quindi la relazione che lega il tempo solare vero al tempo civile è:

$$T_V = T_C \pm \lambda + ET - \Delta T \,, \quad \text{da cui si ricava:}$$

$$\lambda = T_V - T_C - ET + \Delta T = 10{:}00 - 11{:}25 - 00{:}06 + 01{:}00 = -31\text{m} = -7° \, 45'$$

Poiché λ ha segno negativo, la località da cui è stata fatta l'osservazione si trova 7° 45' più a ovest del meridiano centrale e ha quindi longitudine:

$$\lambda_{osservatore} = \lambda_{centrale} - 7° \, 45' = 15° - 7°45' = 7° \, 15'$$

La città è Aosta.

3. Osservazioni con HST

Il Telescopio Spaziale Hubble ha uno specchio con diametro D_{HST} = 2.4 m e orbita attorno alla Terra dalle ore 12:00 UT del 25 aprile 1990 a un'altezza sulla superficie h_{HST} = 539 km.

1. Quante orbite attorno alla Terra ha completato HST alle ore 12:00 UT del 25 aprile 2020?
2. Stimate le dimensioni minime di un corpo che HST è capace di distinguere sulla superficie della Terra osservando alla lunghezza d'onda λ = 5500 Å.

Soluzione:

1. Il periodo orbitale di HST (T_{HST}) si ottiene dalla III legge di Keplero; detti $\mathbf{R_T}$ e $\mathbf{M_T}$ raggio e massa della Terra si ha:

$$T_{HST} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (R_T + h_{HST})^3}{G\, M_T}} \simeq \sqrt{\frac{39.48 \cdot 3.309 \cdot 10^{20}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m}{s^2 \cdot kg} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}} \simeq 5725\ s \simeq 95.4\ minuti$$

Dalle 12:00 UT del 25 aprile 1990 alle 12:00 UT del 25 aprile 2020 sono trascorsi in totale ΔT = 10958 giorni, in quanto dobbiamo considerare che gli anni 1992, 1996, 2000, 2004, 2008, 2012, 2016 e 2020 sono stati bisestili. Il numero di orbite ($Orbite_{HST}$) sarà quindi:

$$Orbite_{HST} = \frac{\Delta T}{T_{HST}} \simeq \frac{10958\ giorni \cdot 86400 \frac{s}{giorno}}{5725\ s} \simeq 165.4 \cdot 10^3\ orbite$$

2. Il potere risolutivo teorico di HST in secondi d'arco (α_{HST}) è dato dalla relazione:

$$\alpha_{HST} = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D_{HST}} \cdot 206265" \simeq 1.22 \cdot \frac{5500 \cdot 10^{-10} m}{2.4\ m} \cdot 206265" \simeq 0".058$$

Questo potere risolutivo consentirebbe a HST di distinguere sulla superficie della Terra oggetti con dimensioni:

$$d_{teorico} = h_{HST} \cdot \tan \alpha_{HST} \simeq 15\ cm$$

Tuttavia, se puntato verso la superficie della Terra HST subirà gli effetti dell'atmosfera, proprio come se osservasse verso lo spazio dalla superfice. Quindi il suo potere risolutivo sarà limitato dagli effetti dell'atmosfera terrestre e sarà dell'ordine di 1". Avremo quindi:

$$d_{effettivo} = h_{HST} \cdot \tan 1" \simeq 2.6\ m$$

4. Una galassia a spirale

Per classificare correttamente una galassia a spirale da una sua immagine, occorre che il suo diametro angolare visto dalla Terra sia di almeno α = 1' e che l'angolo formato tra la direzione di osservazione e il piano della galassia sia dell'ordine di 90° (galassia osservata "di faccia"). Considerate per esempio la galassia nell'immagine a sinistra , per la quale assumete una forma circolare con un diametro medio D_G = 30.1 kpc. Sapendo che la galassia ha magnitudine assoluta integrata M_G = -21.1, calcolate:

1. la massima distanza possibile della galassia, in parsec, anni luce e km, per essere correttamente classificata;
2. la corrispondente magnitudine apparente;
3. la corrispondente magnitudine media superficiale in mag/arcsec².

Soluzione:

1. Il diametro medio della galassia vale:

$$D_G = 30.1 \cdot 10^3\ parsec \simeq 98.2 \cdot 10^3\ anni\ luce \simeq 9.29 \cdot 10^{17}\ km$$

La distanza **d** alla quale il diametro della galassia sottende un angolo α = 1' è dato dalla relazione:

$$d = \frac{D_G}{\tan \alpha} = \frac{D_G}{\tan 1'} \simeq 10.3 \cdot 10^7 parsec \simeq 33.8 \cdot 10^7\ anni\ luce \simeq 3.19 \cdot 10^{21}\ km$$

2. Detta $\mathbf{m_G}$ la magnitudine apparente della galassia vale la relazione:

$$m_G = M_G - 5 + 5\log d = -21.1 - 5 + 5\log\ (10.3 \cdot 10^7) \simeq 13.9$$

3. Detto $\mathbf{R_G}$ il raggio apparente della galassia, la sua area apparente $\mathbf{A_G}$ vale:

$$A_G = \pi\, {R_G}^2 = \pi\,(0'.5)^2 \simeq 0.785 \text{ primi d'arco quadrati} \simeq 2830 \text{ secondi d'arco quadrati}$$

Dalla relazione che fornisce la magnitudine integrata **m** di un oggetto esteso di area **A** nota la magnitudine superficiale $\mathbf{m_{sup}}$: $m = m_{sup} - 2.5 \log A$ ricaviamo:

$$m_{sup-G} = m_G + 2.5\log A_G \simeq 13.9 + 2.5\log 2830 \simeq 22.5 \text{ mag/arcsec}^2$$

5. Quanti fotoni da una stella?

Il Telescopio VLT dell'ESO è formato da quattro telescopi, ognuno con uno specchio con diametro d = 8.2m, che possono inviare la luce raccolta a un fuoco comune. Supponete che il VLT fotografi una stella di magnitudine m = 23.0. Quanti fotoni provenienti da questa stella vengono raccolti in totale dai quattro telescopi del VLT ogni secondo? Assumete per i fotoni un'energia media $E = 4.8 \cdot 10^{-19}\,J$ $\left(J = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = W \cdot s\right)$.

Soluzione:

Confrontiamo il flusso **F** proveniente dal Sole con quello proveniente dalla stella considerando la loro differenza di magnitudine apparente:

$$m_{Stella} - m_{Sole} = -2.5\ \log \frac{F_{Stella}}{F_{Sole}}$$

da cui ricaviamo:

$$F_{stella} = 10^{\left(\frac{m_{Sole} - m_{stella}}{2.5}\right)} \cdot F_{Sole} = 10^{\left(\frac{-26.74 - 23.0}{2.5}\right)} \cdot F_{Sole} \simeq 1.27 \cdot 10^{-20} \cdot F_{Sole}$$

Detta **D** la distanza media della Terra dal Sole, la quantità media di energia $\mathbf{F_{Sole}}$ proveniente dal Sole (chiamata costante solare) che arriva ogni secondo su un metro quadrato alla sommità dell'atmosfera della Terra è data dalla relazione:

$$F_{Sole} = \frac{4\,\pi \cdot R_{Sole}^2 \cdot \sigma \cdot T_{Sole}^4}{4\,\pi \cdot D^2} \simeq \frac{4.837 \cdot 10^{17} m^2 \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4} \cdot 1.115 \cdot 10^{15}\,K^4}{2.238 \cdot 10^{22}\,m^2} \simeq 1366\ \frac{W}{m^2}$$

E quindi otteniamo:

$$F_{stella} \simeq 1.27 \cdot 10^{-20} \cdot F_{Sole} \simeq 1.73 \cdot 10^{-17}\ \frac{W}{m^2}$$

Poiché l'energia media dei fotoni della stella è $E = 4.8 \cdot 10^{-19}\,W \cdot s$, otteniamo che il numero di fotoni **n** in arrivo ogni secondo su una superficie di un metro quadrato è:

$$n = \frac{F_{stella}}{E} \simeq \frac{1.73 \cdot 10^{-17}\ \frac{W}{m^2}}{4.8 \cdot 10^{-19}\ W \cdot s} \simeq 36\ \frac{fotoni}{m^2 \cdot s}$$

L'area complessiva **A** di raccolta del VLT è data dalla somma delle aree dei quattro specchi da 8.2 m:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \simeq 211\ m^2$$

ed è equivalente a quella di un singolo specchio con diametro di 16.4 m. Il numero totale **N** dei fotoni raccolti dal VLT sarà quindi:

$$N = n \cdot A \simeq 36\ \frac{fotoni}{m^2 \cdot s} \cdot 211\ m^2 \simeq 7600\ \frac{fotoni}{s}$$