Olimpiadi Italiane di Astronomia 2020

Corso di preparazione alla Finale Nazionale

Categoria Senior - Lezione 2

1. Una cometa descrive un'orbita con eccentricità e = 0.921 e distanza dal Sole al perielio di 0.451 UA. Consideriamo le due semi-orbite separate dall'asse minore dell'ellisse. Quando tempo impiega la cometa per percorre ognuna delle due semi-orbite?

Soluzione

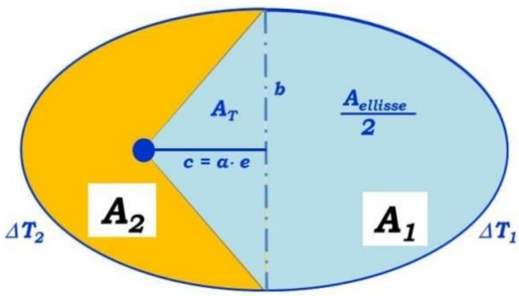
*Deriviamo i parametri dell'orbita della cometa. Per i semiassi **a** e **b** ricaviamo:*

$$a = \frac{d_P}{(1-e)} \simeq \frac{0.451}{0.079} \simeq 5.71\ UA$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \simeq 5.71 \cdot 0.390 \simeq 2.23\ UA$$

*Il periodo orbitale **T** in anni vale:*

$$T = \sqrt{a^3} \simeq \sqrt{186} \simeq 13.6\ anni$$



L'area totale dell'ellisse è data dalla relazione:

$$A_{ellisse} = \pi\, a\, b \simeq 40.0\ UA^2$$

*L'area della semi-orbita **A₂** vale:*

$$A_2 = \frac{A_{ellisse}}{2} - a \cdot e \cdot b \simeq 8.3\ UA^2$$

Dalla II legge di Keplero sappiamo che:

$$\Delta T_n : A_n = T : A_{ellisse}$$

e quindi:

$$\Delta T_2 = \frac{A_2 \cdot T}{A_{ellisse}} \simeq \frac{8.3\ UA^2 \cdot 13.6\ anni}{40.0\ UA^2} \simeq 2.8\ anni$$

Ovviamente per l'altra semi-orbita valgono le relazioni:

$$A_1 = \frac{A_{ellisse}}{2} + a \cdot e \cdot b \simeq 31.7\ UA^2 \qquad \Delta T_1 = \frac{A_1 \cdot T}{A_{ellisse}} \simeq \frac{31.7\ UA^2 \cdot 13.6\ anni}{40.0\ UA^2} \simeq 10.8\ anni$$

Nota: soluzione alternativa

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{A_1}{A_2} \qquad \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} + 1 = \frac{A_1}{A_2} + 1 \qquad \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{\Delta T_2} = \frac{A_1 + A_2}{A_2} \qquad \frac{T}{\Delta T_2} = \frac{A}{A_2} \qquad \Delta T_2 = \frac{A_2 \cdot T}{A}$$

$$A_2 = \frac{\pi\, a\, b}{2} - a \cdot e \cdot b = \left(\frac{\pi}{2} - e\right) ab \qquad \Delta T_2 = \frac{A_2 \cdot T}{A} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - e\right) ab \cdot T}{\pi\, a\, b} = \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{\pi}\right) T \simeq 2.8\ anni$$

$$\Delta T_1 = \frac{A_1 \cdot T}{A} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + e\right) ab \cdot T}{\pi\, a\, b} = \left(\frac{1}{2} + \frac{e}{\pi}\right) T \simeq 10.8\ anni$$

2. Dimostrare che da Catania (φ = +37° 31′) non si può osservare la Luna passare allo Zenith. Per la soluzione si ricordi che l'orbita della Luna è inclinata di circa 5° rispetto all'eclittica. In quali regioni della Terra si può osservare la Luna passare allo Zenith, o oltre?

Soluzione

A Catania l'altezza massima dell'equatore celeste vale:

$$h_{max-equatore-CT} = 90° - \varphi = 90° - 37°\,31' = 52°\,29'$$

L'eclittica forma con l'equatore celeste un angolo ε = 23° 26′ e quindi:

$$h_{max-eclittica-CT} = h_{max-equatore-CT} + \varepsilon$$

Poiché al massimo la Luna si trova 5° sopra l'eclittica, a Catania avremo:

$$h_{max-Luna-CT} = h_{max-eclittica-CT} + 5° = h_{max-equatore-CT} + \varepsilon + 5° = 90° - \varphi + \varepsilon + 5° = 80°\,55'$$

Quindi a Catania la Luna non può raggiungere lo Zenith.
In generale vale la relazione:

$$h_{max-Luna} = 90° - \varphi + \varepsilon + 5°$$

Ponendo $h_{max} = 90°$*otteniamo la latitudine massima dalla quale la Luna passa allo Zenith:*

$$\varphi_{max} = 90° - 90° + \varepsilon + 5° = 28° 26'$$

Per latitudini inferiori la Luna passerà oltre lo Zenith. Poiché considerazioni analoghe valgono per un osservatore nell'emisfero Sud, concludiamo che si può osservare la Luna passare allo Zenith, o oltre, per tutte le località per cui 28° 26' > φ > –28° 26'.

3. Un osservatore dispone di un orologio a tempo universale e di un orologio a tempo siderale. In un certo istante i due orologi segnano entrambi t = 0. Che tempo segnerà l'orologio a tempo siderale quando quello a tempo universale segnerà t = 16 h ?
Soluzione
La durata di un giorno solare medio (il Tempo Universale è definito come il tempo solare medio dell'Osservatorio di Greenwich) è di 24 h, mentre la durata del giorno siderale è di 23h 56m 4.1s = 23.9344722 ore. Il rapporto (K) tra i due valori, che permette di convertire gli intervalli di tempo solare medio (ΔT) in intervalli di tempo siderale (Δt) è

$$K = \frac{24}{23.93447} \simeq 1.0027378$$

Avremo quindi:

$$\Delta t = \Delta T \cdot K = 16 \cdot 1.0027378 \simeq 16.043805\, h \simeq 16h\, 2m\, 37.7s$$

4. Nel 1100 A.C. degli astronomi cinesi misurarono l'altezza massima del Sole al meridiano ai solstizi, ottenendo $h_{21giugno}$ = 79° 7' e $h_{21dicembre}$ = 31° 19'. In entrambi i casi il Sole era a Sud dello Zenith. A quale latitudine furono eseguite queste osservazioni ? Quanto valeva all'epoca l'obliquità dell'eclittica ? E' aumentata o diminuita rispetto al valore attuale ?
Soluzione
La latitudine di un luogo è pari all'altezza del Polo Celeste (Nord in questo caso). Il Polo Celeste si trova a 90° dall'equatore celeste, la cui altezza al meridiano è data dalla media dell'altezza al meridiano del Sole ai solstizi. Si avrà quindi:

$$h_{equatore\ celeste} = \frac{h_{21\ giugno} + h_{21\ dicembre}}{2} = \frac{79° 7' + 31° 19'}{2} = 55° 13'$$

Poiché vale la relazione:

$$\varphi + 90° + h_{equatore\ celeste} = 180°$$

Per ogni latitudine l'altezza massima dell'equatore celeste vale:

$$h_{max-equatore} = 90° - \varphi$$

e quindi:

$$\varphi = 90° - h_{equatore\ celeste} = 90° - 55° 13' = 34° 47'$$

L'obliquità dell'eclittica è data, in valore assoluto, dalla differenza tra l'altezza del Sole al meridiano in uno dei solstizi e l'altezza dell'equatore celeste al meridiano. Si ha quindi:

ε = 79° 7 ' – 55° 13' = 23° 54'

Notiamo che il valore dell'obliquità dall'anno 1100 A.C. a oggi è diminuito di 28'.

5. Come variano le coordinate equatoriali e altazimutali di un satellite posto in un orbita geostazionaria?
Soluzione
I satelliti geostazionari occupano posizioni fisse su un'orbita equatoriale posta a circa 36000 km di altezza dal suolo. Poiché il suo periodo di rivoluzione a pari a un giorno siderale, un satellite geostazionario appare immobile per un osservatore sulla superficie della Terra, quindi le sue coordinate altazimutali e la sua declinazione non cambiano al passare del tempo.

L'ascensione retta invece aumenta a causa della rotazione della Terra. In ogni istante è pari al tempo siderale locale (LST), corretto per la distanza apparente del satellite dal meridiano del luogo espressa in tempo. A causa della differenza tra giorno solare e giorno siderale, dopo 24h di tempo solare medio l'ascensione retta sarà aumentata di circa 3m e 56s rispetto al giorno precedente.
Nota: *I satelliti geostazionari sono visibili da ogni punto della superficie della Terra, a parte le regioni con latitudine maggiore di circa 81° e minore di circa -81°.*

6. Considerate due osservatori posti all'altezza del suolo uno al Polo Nord e l'altro all'Equatore. Calcolate, trascurando l'assorbimento della luce da parte dell'atmosfera, il numero di stelle visibili a occhio nudo che diventano circumpolari per i due osservatori a causa della rifrazione (Area esterna di un cilindro = 2 π R h; Area della sfera celeste, in assenza di rifrazione, = 41253 gradi quadrati).
Soluzione
*Assumiamo che le stelle visibili a occhio nudo, il cui numero è di circa 6000, siano distribuite in modo uniforme sulla volta celeste. Al Polo Nord la rifrazione renderà visibile una "cintura" con 35′ di altezza lungo tutto l'orizzonte. Il numero di stelle contenuto in detta cintura rispetto al totale delle stelle visibili a occhio nudo è pari al rapporto (**K**) tra l'area della cintura e l'area di tutta la sfera celeste. Poiché l'angolo di rifrazione è molto piccolo, possiamo approssimare la cintura con un cilindro avente lo stesso raggio della sfera celeste e la cui altezza **h** sottende un angolo di 35′. Si avrà quindi:*

$$h = R \tan 35'$$

$$K = \frac{2\,\pi\,R\,h}{2\,\pi\,R^2} \simeq \frac{2\,\pi\,R\;\cdot R \tan 35'}{2\,\pi\,R^2} \simeq \tan 35' \simeq 0.01$$

*Quindi il numero **N** di stelle visibili a occhio nudo che diventeranno circumpolari al Polo Nord sarà:*

$$N_{Polo} = \;3000\,K \;\simeq 30$$

Nota: *in realtà il numero di stelle realmente visibili sarà molto minore, in pratica zero, a causa dell'assorbimento atmosferico che in prossimità all'orizzonte supera le 5 magnitudini.*

All'Equatore la rifrazione renderà visibili solo due piccole aree circolari con raggio r = 35′ centrate su i due poli celesti. La somma di queste due piccole aree vale:

$$a = 2\,\pi\,r^2 \;\simeq 2 \textit{ gradi quadrati}$$

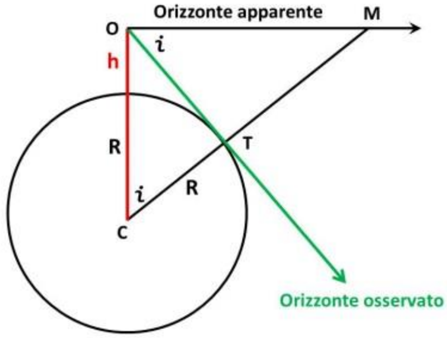
*Il rapporto **A** tra quest'area e quella totale della sfera celeste e il numero di stelle **N** valgono:*

$$A \simeq \frac{2}{41253} \simeq 5\;\cdot\;10^{-5}$$

$$N_{equatore} = \;6000\,A \;\simeq 0.3 \;\simeq 0$$

Quindi all'Equatore nessuna stella visibile a occhio nudo diventa circumpolare a causa della rifrazione.

7. Dal punto più alto di un atollo posto all'equatore la Stella Polare (δ_{2016} ~ 89° 16′) risulta circumpolare. Calcolare l'altezza massima dell'atollo.
Soluzione



L'altezza minima della Polare all'equatore vale:

$$h_{min} = \varphi - 90 + \delta = 0° - 90° + 89°\,16' = -\,44'$$

*La rifrazione abbassa l'orizzonte di circa 35′, quindi per rendere la Polare circumpolare l'altezza dell'atollo **h** dovrà produrre un'ulteriore abbassamento della linea dell'orizzonte di:*

$$i = 44' - 35' = 9'$$

Poiché: $\cos i = \frac{R_{Terra}}{R_{Terra} + h}$

avremo: $h = \frac{R_{Terra}}{\cos i} - R_{Terra} \simeq 22\,m$

8. "Alla sua massima altezza sull'orizzonte, Sirio (α_{2000} = 6h 45m; δ_{2000}= -16° 42', m_V = -1.46) è la stella più luminosa del cielo" è un'affermazione sicuramente vera per un osservatore posto a Catania. Considerando un osservatore posto al livello del mare e trascurando gli effetti dovuti alla precessione, in quali altre regioni della Terra l'affermazione è vera? Si assuma che a 6° $\pm$ 1° di altezza sull'orizzonte l'assorbimento dell'atmosfera è di 1.8 magnitudini e che a 6° di altezza la massa d'aria vale X = 8.5. Si ricordi infine che Arturo (= α Boo, α_{2000} = 14h 15m; δ_{2000}= +19° 11'; m_V = -0.04) è la stella più luminosa dell'emisfero boreale del cielo.

Soluzione

In una località, al livello del mare, a latitudine φ, sono visibili le stelle con declinazione: $\boldsymbol{\delta} > \varphi - 90$.

Sirio sarà quindi visibile per tutte le regioni della Terra con latitudine: $\varphi <$ 73° 18'

Tenendo conto della rifrazione, che all'orizzonte vale circa 35', Sirio sarà visibile da tutte le località con latitudine:

$$\varphi < 73° 53'$$

Tuttavia a un'altezza sull'orizzonte di 6° ± 1°, a causa dell'assorbimento dell'atmosfera, la magnitudine apparente di Sirio sarà circa:

$$m_{Sirio} = -1.46 + 1.8 \approx 0.3$$

Da questo valore deduciamo che il coefficiente di estinzione atmosferica vale:

$$k = \frac{m - m_V}{X_{6°}} \approx \frac{0.3 + 1.46}{8.5} \approx 0.21$$

Sirio ha un'altezza massima di 6° sull'orizzonte per latitudini $\varphi \simeq$ 68°. A queste latitudini l'altezza massima di Arturo (trascurando la rifrazione) sarà:

$$h_{max-Arturo} = 90° - \varphi + \delta \simeq 41°$$

A tale altezza il valore di massa d'aria può essere calcolato con l'approssimazione:

$$X_{42°} \simeq \frac{1}{\cos(90 - h)} \simeq \frac{1}{cos\ 49°} \simeq 1.5$$

e la magnitudine apparente di Arturo sarà:

$$m = m_V + k\,X \simeq -0.04 + 0.21 \cdot 1.5 \simeq 0.3$$

Quindi Sirio risulta visibile per latitudini $\varphi <$ 73° 53', per latitudini 68° $\pm 1° \lesssim \varphi <$ 73° 53', l'assorbimento dell'atmosfera fa si che Arturo risulti più luminosa di Sirio. Per tutte le regioni della Terra a latitudine $\varphi <$ 68° $\pm 1°$ Sirio sarà comunque la stella più luminosa del cielo.

9. Calcolate l'angolo orario e l'azimut del Sole all'alba del 22 febbraio 2015 osservato dalla città di Napoli (α_{Sole} = 22h 18m 59s; δ_{Sole} = -10° 28' 42"; $\varphi_{Napoli} =$ 40° 51' 22"). Trascurate la rifrazione.

Soluzione

*Le relazioni che legano l'angolo orario di un astro (**H**) con la sua declinazione (δ), l'altezza sull'orizzonte (**h**), l'Azimut (**A**) e la latitudine del luogo di osservazione (φ) sono:*

$$sin\,\boldsymbol{h} = sin\,\boldsymbol{\delta}\,sin\,\boldsymbol{\varphi} + cos\,\boldsymbol{\delta}\,cos\,\boldsymbol{\varphi}\,cos\,\boldsymbol{H} \qquad sin\,\boldsymbol{\delta} = sin\,\boldsymbol{h}\,sin\,\boldsymbol{\varphi} - cos\,\boldsymbol{h}\,cos\,\boldsymbol{\varphi}\,cos\,\boldsymbol{A}$$

Quando il Sole sorge o tramonta si ha: h=0 (da cui sin h = 0 e cos h =1) e otteniamo quindi:

$$cos\,\boldsymbol{H} = -\frac{sin\,\boldsymbol{\delta}\,sin\,\boldsymbol{\varphi}}{cos\,\boldsymbol{\delta}\,cos\,\boldsymbol{\varphi}} = -\ tg\,\boldsymbol{\delta}\,tg\,\boldsymbol{\varphi} \qquad e\ infine:\ \boldsymbol{H} = \pm arccos\ (-\ tg\,\boldsymbol{\delta}\,tg\,\boldsymbol{\varphi})$$

$$cos\,\boldsymbol{A} = -\frac{sin\,\boldsymbol{\delta}}{cos\,\boldsymbol{\varphi}} \qquad e\ infine:\ \boldsymbol{A} = \pm arccos\,(-\frac{sin\,\boldsymbol{\delta}}{cos\,\boldsymbol{\varphi}})$$

Per la città di Napoli nella data indicata si ha:

δ_{Sole} = -10° 28' 42" = -10°.4783, $\varphi_{Napoli} =$ 40° 51' 22" = 40°.8561; da cui si ricava (con il segno meno sia per H che per A dovuto al fatto che all'alba il Sole si trova prima del meridiano):

$$\boldsymbol{H} \simeq -\,arcos\,(0.1600) \simeq -\,80°.80 \simeq -5h\,23m\,11s = 18h\,36m\,49s$$

$$\boldsymbol{A} = -\,arcco\,s\left(-\frac{sin\,\boldsymbol{\delta}}{cos\,\boldsymbol{\varphi}}\right) = -\,arcos\,(0.2404) = -76°\,5'\,14" = 283°\,54'\,46"$$