



# Olimpiadi Italiane di Astronomia 2020

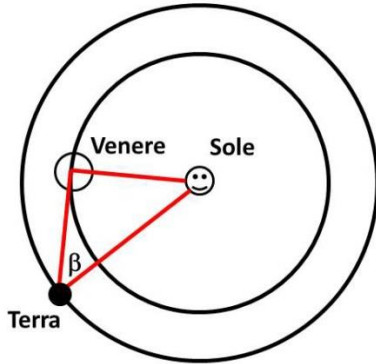
## Corso di preparazione alla Finale Nazionale

### Categoria Junior 2 - Lezione 1

1. A una massima elongazione la distanza angolare di Venere dal Sole era di  $46^\circ 19'$ , mentre la Terra si trovava esattamente a 1 UA dal Sole. Ricavate a che distanza si trovava Venere dal Sole e dalla Terra in UA e in km.

#### Soluzione.

A una massima elongazione il Sole, Venere e la Terra si trovano ai vertici di un triangolo rettangolo, con Venere nel vertice corrispondente all'angolo retto.



In questa configurazione possiamo osservare esattamente metà della superficie del pianeta. Quella mostrata nella figura a sinistra è una massima elongazione con Venere a ovest del Sole.

Detti  $VS$  la distanza Venere-Sole,  $VT$  la distanza Venere-Terra e  $TS$  la distanza Terra-Sole ( $= 1 \text{ UA}$ ), vale la relazione:

$$VS = 1 \text{ UA} \cdot \sin 46^\circ.32 \cong 0.7232 \text{ UA} \cong 108.2 \cdot 10^6 \text{ km}$$

La distanza  $VT$  si può ricavare con il teorema di Pitagora, oppure dalla relazione:

$$VT = TS \cdot \cos 46^\circ.32 \cong 0.6906 \text{ UA} \cong 103.3 \cdot 10^6 \text{ km}$$

2. La forza di gravità che si esercita tra due corpi è di  $F = 10^4 \text{ N}$ . Il primo ha raggio  $R_1 = 30.2 \text{ km}$  e densità  $\rho_1 = 1.42 \text{ g/cm}^3$ , il secondo ha raggio  $R_2 = 15.1 \text{ km}$  e densità  $\rho_2 = 3.44 \text{ g/cm}^3$ . A che distanza si trovano i due corpi ?

#### Soluzione.

Le densità dei due corpi valgono:  $\rho_1 = 1.42 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1.42 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ;  $\rho_2 = 3.44 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 3.44 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

Essendo  $M = \rho V$ , ricaviamo:

$$M_1 = \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3 \cong 1.42 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 2.75 \cdot 10^{13} \text{ m}^3 \cong 1.64 \cdot 10^{17} \text{ kg}$$

$$M_2 = \rho \frac{4}{3} \pi R_2^3 \cong 3.44 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 3.44 \cdot 10^{12} \text{ m}^3 \cong 4.96 \cdot 10^{16} \text{ kg}$$

Nota la forza, ricaviamo la distanza tra i due corpi dalla legge di Gravitazione universale:

$$d = \sqrt{\frac{G M_1 M_2}{F}} \cong \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 1.64 \cdot 10^{17} \text{ kg} \cdot 4.96 \cdot 10^{16} \text{ kg}}{10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}}}$$

3. Calcolate il peso di un corpo di massa  $M = 100 \text{ kg}$  all'equatore di Mercurio e all'equatore di Saturno considerando l'effetto della forza centrifuga dovuta alla rotazione. Il periodo di rotazione dei due pianeti è, rispettivamente, di 1407.5 h e 10h 33m. Poiché Saturno non ha una superficie solida, si assuma come distanza dal centro il raggio medio del pianeta.

#### Soluzione.

Detta  $g$  l'accelerazione di gravità, il peso  $P$  di un corpo è la forza con cui il corpo è attratto dal pianeta, ovvero la forza di gravità che si esercita tra corpo e pianeta:  $P = m g$ . L'accelerazione di gravità è data dalla relazione:  $g = \frac{G \cdot M}{R^2}$  e alla superficie di Mercurio e di Saturno vale:

$$g_{\text{Mercurio}} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 3.301 \cdot 10^{23} \text{ kg}}{(2440 \cdot 10^3)^2 \text{ m}^2} \approx 3.300 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$g_{\text{Saturno}} \approx \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 5.685 \cdot 10^{26} \text{ kg}}{(60267 \cdot 10^3)^2 \text{ m}^2} \approx 10.45 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

In assenza di rotazione, il peso del corpo sarebbe quindi:  $P_{\text{Mercurio}} \approx 370 \text{ N}$ ,  $P_{\text{Saturno}} \approx 1045 \text{ N}$ . La forza centrifuga è data dalla relazione:  $F_c = m \frac{v^2}{R} = m \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R}{T^2}$  e all'equatore è diretta in senso opposto alla gravità. Per i due pianeti avremo:

$$F_{cm} \approx 100 \text{ kg} \frac{39.48 \cdot 2440 \cdot 10^3 \text{ m}}{25.67 \cdot 10^{12} \text{ s}^2} \approx 3.75 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

$$F_{cs} \approx 100 \text{ kg} \frac{39.48 \cdot 60267 \cdot 10^3 \text{ m}}{144.2 \cdot 10^7 \text{ s}^2} \approx 165 \text{ N}$$

Nel caso di Mercurio il peso resta praticamente invariato, mentre nel caso di Saturno il peso sarà:  $P_{\text{Saturno}} = 1045 \text{ N} - 165 \text{ N} \approx 880 \text{ N}$

4. Un satellite artificiale ruota attorno alla Terra, che assumiamo perfettamente sferica, su un'orbita equatoriale circolare a una distanza  $d = 4325 \text{ km}$  dalla superficie. Un osservatore lo vede passare al meridiano a mezzanotte. Dopo quanto tempo lo vedrà passare nuovamente al meridiano se: a) il satellite si muove da Ovest verso Est; b) il satellite si muove da Est verso Ovest ?

#### Soluzione.

La distanza  $D$  del satellite dal centro della Terra vale:  $D = 6378 \text{ km} + 4325 \text{ km} = 10703 \text{ km}$ . Possiamo ricavare il suo periodo di rivoluzione  $T_s$  dalla III legge di Keplero:

$$T_s = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 D^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{39.478 \cdot 1.2261 \cdot 10^{21} \text{ m}^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} \approx 11020 \text{ s} \approx 3 \text{ h } 3 \text{ m } 40 \text{ s}$$

I passaggi successivi del satellite al meridiano di un luogo avvengono a intervalli di tempo pari al suo periodo sinodico  $S$  riferito alla rotazione siderale della Terra ( $T_T \approx 23 \text{ h } 56 \text{ m } 4 \text{ s} = 86164 \text{ s}$ ). Se il satellite si muove da Ovest verso Est, ovvero nello stesso senso della rotazione della Terra si ha:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_s} - \frac{1}{T_T} \quad \text{ovvero: } S = \frac{T_s \cdot T_T}{|T_s - T_T|} \quad \text{da cui ricaviamo: } S \approx 12640 \text{ s} \approx 3 \text{ h } 30 \text{ m } 40 \text{ s}$$

Se il satellite si muove da Est verso Ovest, ovvero nella direzione opposta della rotazione della Terra si ha:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_s} + \frac{1}{T_T} \quad \text{ovvero: } S = \frac{T_s \cdot T_T}{|T_s + T_T|} \quad \text{da cui ricaviamo: } S \approx 9770 \text{ s} \approx 2 \text{ h } 42 \text{ m } 50 \text{ s}$$

5. Si consideri una stella di neutroni con raggio di  $15.0 \text{ km}$  e massa pari al doppio di quella del Sole. Calcolare: la densità media della stella, l'accelerazione di gravità sulla sua superficie, la velocità di arrivo al suolo di un corpo che, partendo da fermo, cade da un'altezza  $h = 2 \text{ m}$  dalla superficie, il tempo di caduta del corpo. Calcolare inoltre il peso sulla superficie della Terra di  $1 \text{ cm}^3$  di materia della stella di neutroni e le dimensioni di un cubo di ferro ( $\rho_{\text{FE}} = 7870 \text{ kg/m}^3$ ) con la stessa massa di  $1 \text{ cm}^3$  di materia della stella di neutroni.

#### Soluzione.

La densità media della stella di neutroni è data da:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3 \cdot 3.978 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{12.57 \cdot 3.375 \cdot 10^{12} \text{ m}^3} \approx 2.81 \cdot 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx 2.81 \cdot 10^{11} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$$

L'accelerazione di gravità sulla sua superficie è data da:

$$a_g = \frac{GM}{R^2} \approx \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 3.978 \cdot 10^{30} \text{kg}}{225 \cdot 10^6 \text{ m}^2} \approx 1.18 \cdot 10^{12} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Assumendo costante l'accelerazione di gravità, la velocità di arrivo al suolo con partenza da fermo, vale:

$$v = \sqrt{2 a_g h} = \sqrt{2 \cdot 1.18 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10^{12} \cdot 2 \text{ m}} \approx 2.17 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2.17 \cdot 10^3 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Il tempo della caduta è dato dalla relazione:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{4 \text{ m}}{1.18 \cdot 10^{12} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \approx 1.84 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

La massa di  $1 \text{ cm}^3$  di materia della stella di neutroni vale:  $M = V \rho \approx 2.81 \cdot 10^{11} \text{ kg}$ , il suo peso sulla superficie della Terra è:

$$P = M a_g \approx 2.81 \cdot 10^{11} \text{ kg} \cdot 9.807 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 27.6 \cdot 10^{11} \text{ N}$$

Poiché  $1 \text{ m}^3$  di ferro ha una massa di  $7870 \text{ kg}$ , per avere una massa  $M_{FE} = 2.81 \cdot 10^{11} \text{ kg}$ ,

avremo bisogno di un cubo con lato:  $L = \sqrt[3]{\frac{2.81 \cdot 10^{11} \text{ kg}}{7870 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} \approx 329 \text{ m}$

6. La Luna si allontana dalla Terra a una velocità  $V_a \sim 3.8 \text{ cm/anno}$ . Tra quanto tempo non sarà più possibile osservare eclissi totali di Sole ?

### Soluzione.

Le eclissi totali di Sole non avranno più luogo quando il diametro apparente della Luna al perielio ( $D_{PLuna}$ ) sarà minore del diametro apparente del Sole all'afelio ( $D_{A\odot}$ ). La dimensione angolare del Sole all'afelio è data dalla relazione:

$$D_{A\odot} = 2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{R_{\odot}}{d_{A\odot}} \right) \approx 31'.44$$

La distanza ( $d_{FE}$ ) dalla quale il disco lunare sottende un angolo  $\alpha = 31'.44$  (ovvero il raggio lunare sottende un angolo di  $15'.72$ ), è data da:

$$d_{FE} = \frac{2 R_{Luna}}{\sin \alpha} \approx \frac{3476 \text{ km}}{\sin 0^\circ.524} \approx 380.1 \cdot 10^3 \text{ km}$$

La distanza attuale della Luna al perigeo  $d_p$  vale:  $d_p = a_{Luna} (1-e) \approx 363.3 \cdot 10^3 \text{ km}$ . Detta  $V_a$  la velocità di allontanamento il tempo  $T$  necessario affinché la distanza della Luna al perigeo diventi uguale a  $d_{FE}$  è data da:

$$T = \frac{d_{FE} - d_p}{V_a} \approx \frac{380.1 \cdot 10^8 \text{ cm} - 363.3 \cdot 10^8 \text{ cm}}{3.8 \frac{\text{cm}}{\text{s}}} \approx \frac{16.8 \cdot 10^8 \text{ cm}}{3.8 \frac{\text{cm}}{\text{s}}} \approx 440 \cdot 10^6 \text{ anni}$$

**Nota:** nella soluzione si assume che la velocità di allontanamento, le eccentricità dell'orbita lunare e dell'orbita della Terra e il raggio del Sole rimangano costanti; considerando le loro variazioni si stima che le eclissi totali di Sole non saranno più osservabili dalla Terra tra  $\sim 600 \cdot 10^6$  anni.

7. L'asteroide Pallas ha un raggio medio  $R = 512 \text{ km}$ , l'accelerazione di gravità alla sua superficie vale:  $g = 0.210 \text{ m/s}^2$ . Calcolare la densità dell'asteroide in  $\text{kg/m}^3$  e in  $\text{g/cm}^3$  e la sua velocità di fuga. Calcolare la velocità ( $v_i$ ) di impatto con l'asteroide di un corpo di piccola massa lasciato cadere, da fermo, da una distanza  $h = 800 \text{ km}$  dalla superficie.

### Soluzione.

L'asteroide ha un volume pari a:  $V = \frac{4}{3} \pi R^3 \approx 56.2 \cdot 10^7 \text{ km}^3 = 56.2 \cdot 10^{16} \text{ m}^3$ , ed essendo nota l'accelerazione di gravità alla sua superficie ricaviamo la massa:

$$M = \frac{g \cdot R^2}{G} \approx \frac{0.210 \frac{m}{s^2} \cdot 2.62 \cdot 10^{11} m^2}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}} \approx 8.24 \cdot 10^{20} kg$$

e la densità è quindi:

$$\rho = \frac{M}{V} \approx \frac{8.24 \cdot 10^{20} kg}{56.2 \cdot 10^{16} m^3} \approx 1470 \frac{kg}{m^3} = 1.47 \frac{g}{cm^3}$$

La velocità di fuga dall'asteroide vale:

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \cdot 8.24 \cdot 10^{20} kg}{512000 m}} \approx 463 \frac{m}{s} = 0.463 \frac{km}{s}$$

La distanza da cui cade il corpo è dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni dell'asteroide. Dalla conservazione dell'energia meccanica posto  $H = h + R = 1312 km$  ed essendo la velocità iniziale  $v_0 = 0$ , si avrà:

$$\frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{GMm}{R} = 0 - \frac{GMm}{H}$$

Da cui:

$$v_i = \sqrt{2GM \left( \frac{H-R}{HR} \right)} \approx \sqrt{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \cdot 8.24 \cdot 10^{20} kg \left( \frac{800 \cdot 10^3 m}{1312 \cdot 10^3 m \cdot 512 \cdot 10^3 m} \right)} \approx 362 \frac{m}{s}$$

8. Determinare il semiasse maggiore dell'orbita di un asteroide che, osservato dalla Terra, ha un periodo sinodico pari al suo periodo siderale. Quanto possono valere, al massimo, l'eccentricità dell'orbita e la distanza dell'asteroide dal Sole all'afelio?

### Soluzione.

Le relazioni che legano il Periodo Sinodico  $S$  di un corpo del Sistema Solare osservato dalla Terra con il suo Periodo Siderale  $P$  e con il Periodo Siderale della Terra  $E$  sono:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{E} - \frac{1}{P} \quad \text{per un corpo con periodo orbitale maggiore di quello della Terra}$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{E} \quad \text{per un corpo con periodo orbitale minore di quello della Terra}$$

$$\text{Da cui ricaviamo rispettivamente: } \frac{1}{S} + \frac{1}{P} = \frac{1}{E} \quad \text{e} \quad \frac{1}{S} - \frac{1}{P} = -\frac{1}{E}$$

Se  $S = P$  notiamo che l'asteroide non può avere periodo orbitale minore di quello della Terra; varrà allora solo la relazione:

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{P} = \frac{1}{E} \quad \text{da cui: } \frac{1}{P} + \frac{1}{P} = \frac{1}{E} \quad \text{e infine: } P = 2E = 2 \text{ anni}$$

Nota il periodo siderale ricaviamo il semiasse maggiore  $a$  dell'orbita dalla III legge di Keplero:

$$a = \sqrt[3]{P^2} \approx 1.587 \text{ UA} \approx 237.4 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Per ricavare la massima distanza all'afelio  $D_A$  calcoliamo l'eccentricità massima dell'orbita, considerando che la distanza al perielio  $D_P$  non può essere minore del raggio del Sole.

$$D_P = R_\odot = a(1-e) \quad \text{da cui: } e = 1 - \frac{R_\odot}{a} \approx 1 - \frac{695500 \text{ km}}{237.4 \cdot 10^6 \text{ km}} \approx 0.9971$$

$$\text{Si avrà infine: } D_A = a(1+e) \approx 474.1 \cdot 10^6 \text{ km}$$

**Nota:** nella realtà un asteroide non può avvicinarsi al Sole a una distanza così piccola. Per calcolare un valore approssimato della distanza minima si veda la nota alla fine del problema 10.

9. Un corpo di piccola massa viene lanciato radialmente dalla superficie di un pianeta, che assumiamo perfettamente sferico, con una velocità pari alla metà della velocità di fuga. Calcolare a che distanza dal centro del pianeta la velocità del corpo si annulla. Trovate una relazione che leghi il rapporto tra la velocità iniziale del corpo e quella di fuga con l'altezza raggiunta.

**Soluzione.**

Scriviamo la legge di conservazione dell'energia meccanica indicando con  $R$  il raggio del pianeta di massa  $M$ , con  $m$  la massa del corpo e con  $H$  la distanza dal centro del pianeta in cui la velocità del corpo si annulla. Poiché la velocità di fuga è data dalla relazione  $v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ , avremo:

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2GM}{R}} \right)^2 - \frac{GMm}{R} = 0 - \frac{GMm}{H}$$

$$\frac{1}{4} \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{R} = 0 - \frac{GMm}{H}$$

da cui ricaviamo:  $\frac{1}{4R} - \frac{1}{R} = -\frac{1}{H}$       ovvero:  $-\frac{3}{4R} = -\frac{1}{H}$       e infine:  $H = \frac{4}{3} R$

Indichiamo con  $K$  il rapporto tra la velocità con cui viene lanciato il corpo e la velocità di fuga:

$$K = \frac{v}{v_f} \quad \text{con: } 0 \leq v \leq v_f$$

La legge di conservazione dell'energia meccanica assume la forma:

$$\frac{1}{2} m \left( K \sqrt{\frac{2GM}{R}} \right)^2 - \frac{GMm}{R} = 0 - \frac{GMm}{H}$$

da cui ricaviamo:  $\frac{K^2}{R} - \frac{1}{R} = -\frac{1}{H}$       e infine:  $H = \frac{R}{1-K^2}$

Per  $K = 1/2$  otteniamo il valore:  $H = \frac{4}{3} R$ , se invece  $v = 0$  avremo  $K = 0$  e quindi  $H=R$ , mentre se  $v = v_f$  avremo  $K=1$  e il corpo raggiungerà una distanza infinita dal pianeta.

10. Si consideri una cometa con un nucleo di forma approssimativamente sferica e raggio  $R_c = 2 \text{ km}$  e con densità media  $\rho_c = 500 \text{ kg/m}^3$  in avvicinamento al pianeta Giove. Si calcoli, approssimativamente, a quale distanza dalla superficie di Giove le forze mareali cominceranno a disgregare il nucleo della cometa.

**Soluzione.**

Calcoliamo il limite di Roche di Giove, il cui valore dipende anche dalla natura del corpo in avvicinamento. La cometa in esame è un corpo poco compatto, come indicato dalla sua densità pari a metà di quella dell'acqua. La massa della cometa vale:

$$M_c = \rho_c \frac{4}{3} \pi R_c^3 \approx 500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{4}{3} \pi (2000)^3 \text{ m}^3 \approx 1.68 \cdot 10^{13} \text{ kg}$$

Per una cometa una buona approssimazione del limite di Roche è dato dalla relazione:

$$d \approx 2.44 r_{\text{cometa}} \sqrt[3]{\frac{M}{m}} \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{M}{\rho_m}} \approx 2.44 \cdot 2 \text{ km} \sqrt[3]{\frac{1.899 \cdot 10^{27} \text{ kg}}{1.68 \cdot 10^{13} \text{ kg}}} \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{1.899 \cdot 10^{27} \text{ kg}}{500 \text{ kg/m}^3}} \approx 23.6 \cdot 10^4 \text{ km}$$

Il valore trovato è:

$$d \approx 3.3 R_{\text{Giove}} \quad \text{e quindi la distanza cercata è: } D = d - R_G \approx 2.3 R_{\text{Giove}} \approx 16.5 \cdot 10^4 \text{ km}$$

**Nota al problema 8.**

Per rispondere in modo più accurato alla seconda parte del problema, stimiamo la distanza al perielio a cui può avvicinarsi l'asteroide senza essere distrutto dalle forze mareali dovute al Sole. Poiché il problema non fornisce le caratteristiche dell'asteroide assumiamo per la sua densità quella ricavata nel problema 7 per Pallas:  $\rho \approx 1470 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1.47 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

Utilizzando, in prima approssimazione, l'espressione usata per la cometa, la minima distanza del perielio dell'asteroide sarà:

$$d_{p\text{-asteroide}} \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{M_{Sole}}{\rho_m}} \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{1470 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} \approx 1.67 \cdot 10^6 \text{ km} \approx 2.4 R_{Sole}$$

Per ricavare l'eccentricità dell'orbita e la massima distanza all'afelio assumiamo  $D_P \approx 1.67 \cdot 10^6 \text{ km}$ :

$$e = 1 - \frac{D_P}{a} \approx 1 - \frac{1.67 \cdot 10^6 \text{ km}}{237.4 \cdot 10^6 \text{ km}} \approx 0.993$$

$$D_A = a(1+e) \approx 473.1 \cdot 10^6 \text{ km}$$