

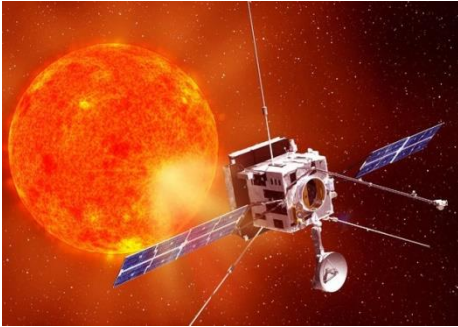


OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2019

Gara Interregionale – 15 febbraio

Categoria Senior

1. Un satellite elio-stazionario



Il periodo di rotazione siderale equatoriale del Sole è $T = 25.38$ giorni. Volete mettere in orbita un satellite intorno al Sole, in modo che risulti “elio-stazionario” (ovvero immobile nel cielo) se osservato dall’equatore del Sole.

1. A che distanza dal centro del Sole dovrete collocare il satellite?
2. Perché questo satellite non sarà elio-stazionario se osservato da punti che non si trovano sull’equatore del Sole?

Soluzione.

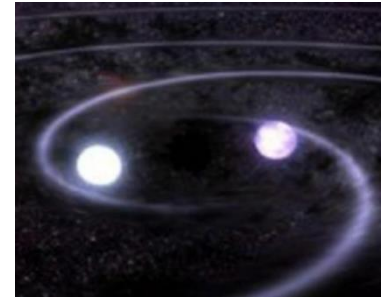
1. Per essere elio-stazionario il satellite dovrà ruotare intorno al Sole con un periodo esattamente uguale al periodo di rotazione siderale del Sole. Possiamo ricavare la distanza del satellite dal centro del Sole dalla III legge di Keplero: $a = \sqrt[3]{T^2}$, con a espresso in UA e T in anni. Poiché il periodo di rotazione siderale equatoriale del Sole vale: $T \cong 6.948 \cdot 10^{-2}$ anni, avremo:

$$a = \sqrt[3]{(6.948 \cdot 10^{-2})^2} \cong 0.1690 \text{ UA} \cong 25.28 \cdot 10^6 \text{ km}$$

2. La rotazione del Sole è “differenziale”, con il periodo di rotazione che aumenta man mano che ci si sposta verso i poli. Quindi solo un osservatore posto sull’equatore può osservare il satellite immobile nel cielo.

2. Un sistema di stelle di neutroni

PSR B1913+16 è un sistema binario composto da due stelle di neutroni identiche perfettamente sferiche ciascuna con densità media $\rho = 1.965 \cdot 10^{11} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$ e massa $M = 2.831 \cdot 10^{30} \text{ kg}$. Le due stelle ruotano su un’orbita circolare con un periodo $P = 7.7542$ ore, che attualmente diminuisce di 55 secondi ogni anno.



Calcolate:

1. il raggio, in km, delle due stelle di neutroni;
2. il valore attuale del semiasse maggiore dell’orbita;
3. la velocità con cui attualmente le due stelle si muovono sull’orbita;
4. di quanto diminuisce dopo un anno il semiasse maggiore dell’orbita.

Soluzione.

1. Poiché il volume di una sfera è dato dalla relazione: $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{M}{\rho}$, ricaviamo per il raggio delle due stelle:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2.831 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{4 \cdot \pi \cdot 1.965 \cdot 10^{11} \text{ kg/cm}^3}} = 150.9 \cdot 10^4 \text{ cm} = 15.09 \text{ km}$$

2. Il periodo di rivoluzione del sistema vale attualmente $P = 7.7542$ ore = 27915 s. Possiamo ricavare il valore del semiasse maggiore dell’orbita (ovvero il raggio visto che l’orbita è circolare) dalla III legge di Keplero:

$$a = \sqrt[3]{\frac{G \cdot 2M \cdot P^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 5.662 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot 779.25 \cdot 10^6 \text{ s}^2}{39.478}} \cong 195.4 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$= 195.4 \cdot 10^4 \text{ km}$$

3. La lunghezza dell’orbita per ciascuna stella è:

$C = 2 \pi a \cong 1228 \cdot 10^4 \text{ km}$, per cui la velocità lungo l'orbita vale:

$$V = \frac{C}{P} = \frac{1228 \cdot 10^4 \text{ km}}{27915 \text{ s}} \cong 440 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

4. Dopo un anno il periodo di rivoluzione varrà $P_1 = P - 55 = 27860 \text{ s}$ e la lunghezza del semiasse maggiore dell'orbita (a_1) sarà:

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{G \cdot 2 M \cdot P_1^2}{4 \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 5.662 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot 776.18 \cdot 10^6 \text{ s}^2}{39.478}} \cong 195.1 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$\cong 195.1 \cdot 10^4 \text{ km}$$

Quindi dopo un anno il semiasse maggiore sarà diminuito di circa $\Delta a = 3000 \text{ km}$

3. Betelgeuse luminosa come la Luna piena



La stella Betelgeuse (α Ori) si trova a circa 152 parsec di distanza dal Sole, ha una magnitudine apparente media $m = 0.42$ e temperatura superficiale di 3500 K. A che distanza si dovrebbe trovare Betelgeuse per apparire luminosa come la Luna piena ($m = -12.74$), senza considerare l'eventuale presenza di polveri interstellari o altri assorbimenti? A tale distanza quanto varrebbe il diametro apparente di Betelgeuse? Sarebbe possibile osservare Betelgeuse come un oggetto esteso dalla Terra assumendo un seeing medio di 1''? Se sì, che diametro minimo dovrebbe avere un telescopio, supponendo di osservare visualmente, ovvero a $\lambda = 5500 \text{ \AA}$, per mostrare Betelgeuse come un oggetto esteso?

Soluzione.

Dalla formula di Pogson ricaviamo la magnitudine assoluta di Betelgeuse:

$$M = m + 5 - 5 \log d = 0.42 + 5 - 5 \log 152 = -5.49$$

Per trovare la distanza alla quale Betelgeuse apparirebbe luminosa come la Luna piena applichiamo di nuovo la legge di Pogson a Betelgeuse, questa volta con $m = \text{magnitudine Luna piena} = -12.74$:

$$5 \log d = m - M + 5 = -12.74 + 5.49 + 5 = -2.25 \quad \rightarrow \quad d = 10^{\frac{-2.25}{5}} = 10^{-0.45} = 0.355 \text{ pc}$$

Per calcolare il diametro apparente di Betelgeuse, alla distanza di 0.355 pc dal Sole, dobbiamo prima ricavare il suo raggio.

Confrontando Betelgeuse con il Sole e utilizzando la legge di Stefan-Boltzmann per la luminosità, abbiamo:

$$\begin{aligned} M_B - M_S &= -2.5 \log \left(\frac{L_B}{L_S} \right) = \\ &= -2.5 \log \left(\frac{4\pi\sigma T_B^4 R_B^2}{4\pi\sigma T_S^4 R_S^2} \right) = -2.5 \log \left(\left(\frac{T_B}{T_S} \right)^4 \left(\frac{R_B}{R_S} \right)^2 \right) = -2.5 \log \left(\frac{T_B}{T_S} \right)^4 - 2.5 \log \left(\frac{R_B}{R_S} \right)^2 = \\ &= -10 \log \left(\frac{3500 \text{ K}}{5778 \text{ K}} \right) - 5 \log \left(\frac{R_B}{R_S} \right) = +2.177 - 5 \log \left(\frac{R_B}{R_S} \right) \cong 220 \cdot 10^6 \text{ km} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} -5 \log \left(\frac{R_B}{R_S} \right) &= -5.49 - 4.83 - 2.177 = -12.50 \quad \rightarrow \quad R_B = 10^{\frac{12.50}{5}} R_S = 10^{2.5} \cdot R_S \cong 316 R_S \cong \\ &\cong 220 \cdot 10^6 \text{ km} \end{aligned}$$

Dato che $0.355 \text{ pc} \cong 1.10 \cdot 10^{13} \text{ km}$, il diametro apparente (α) di Betelgeuse è:

$$\alpha = 2 \cdot \sin^{-1} \left(\frac{R_B}{d} \right) = 2 \cdot \sin^{-1} \left(\frac{220 \cdot 10^6 \text{ km}}{1.10 \cdot 10^{13} \text{ km}} \right) = 2 \cdot \sin^{-1} (2 \cdot 10^{-5}) = 8.25''$$

A causa dell'atmosfera terrestre il potere risolutivo dei telescopi posti sulla superficie della Terra è limitato al valore medio del seeing, che è $\cong 1''$. Ma le dimensioni apparenti di Betelgeuse risultano maggiori del valore medio del seeing, quindi ha senso calcolare il diametro del telescopio che ci permette di vederlo come un corpo esteso.

Il potere risolutivo “ β ” in secondi d'arco di un telescopio con apertura “D” per osservazioni a lunghezza d'onda λ è dato dalla relazione:

$$\beta = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D} \cdot 206265$$

Ponendo quindi $\beta = 8.25''$, possiamo ricavare l'apertura minima del telescopio che ci permette di osservare Betelgeuse come sorgente estesa:

$$D = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{\beta} \cdot 206265 = 1.22 \cdot \frac{5500 \cdot 10^{-10} \text{ m}}{8.25''} \cdot 206265 = 0.0168 \text{ m} = 1.68 \text{ cm}$$

4. Una nebulosa planetaria

Una nebulosa planetaria ci appare perfettamente sferica. Il suo diametro è di 30000 UA, mentre la sua distanza dal Sole è di 1000 anni luce. La nebulosa si espande con una velocità radiale costante $V_r = 30 \text{ km/s}$. La magnitudine superficiale media della nebulosa è: $m_{\text{sup}} = 18.69 \text{ mag/arcsec}^2$. Nell'ipotesi che la velocità di espansione e la magnitudine superficiale attuali si mantengano invariate nel tempo, calcolate:

1. la magnitudine apparente integrata della nebulosa planetaria;
2. il suo diametro tra 100 anni;
3. la sua magnitudine integrata tra 100 anni.



Soluzione.

1. Detti “D” il valore del diametro attuale della nebulosa e “ α ” il corrispondente diametro angolare, indicando con “d” la distanza vale la relazione:

$D = d \tan \alpha$, da cui ricaviamo:

$$\alpha = \text{arctg} \frac{D}{d} = \text{arctg} \frac{4.488 \cdot 10^{12} \text{ km}}{9461 \cdot 10^{12} \text{ km}} \cong 1'.631 \cong 97''.85$$

L'area della nebulosa sarà quindi:

$$A = \pi \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 = 7519 \text{ arcsec}^2$$

Per la magnitudine apparente integrata avremo infine:

$$m_A = m_{\text{sup}} - 2.5 \log A = 9.00$$

2. In 100 anni la nebulosa si espanderà in ogni direzione di una quantità:

$$\Delta R = v \cdot \Delta t = 30 \text{ km/s} \cdot 315.58 \cdot 10^7 \text{ s} \cong 9.4674 \cdot 10^{10} \text{ km} \cong 632.8 \text{ UA}$$

Quindi il diametro della nebulosa tra 100 anni varrà:

$$D_{100} = D + 2 \cdot \Delta R \cong 31270 \text{ UA} \cong 4.677 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

3. Essendo ancora: $D_{100} = d \tan \alpha_{100}$,
ricaviamo:

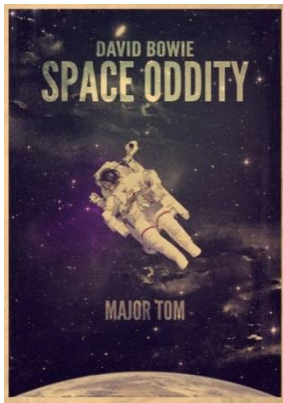
$$\alpha_{100} = \text{arctg} \frac{D_{100}}{d} = \text{arctg} \frac{4.677 \cdot 10^{12} \text{ km}}{9461 \cdot 10^{12} \text{ km}} \cong 1'.700 \cong 102''.0$$

L'area della nebulosa sarà quindi: $A_{100} = \pi \left(\frac{\alpha_{100}}{2} \right)^2 = 8167 \text{ arcsec}^2$

Per la magnitudine apparente integrata avremo infine:

$$m_{A100} = m_{\text{sup}} - 2.5 \log A_{100} = 8.91$$

5. Il Maggiore Tom



Nel testo della canzone “Space Oddity” (David Bowie, 1969), il Maggiore Tom, in orbita con la sua navicella attorno alla Terra, afferma di essere: “Though I’m past one hundred thousand miles”, ovvero a 100000 miglia dalla Terra. Sapendo che il miglio nautico è definito come la lunghezza dell’arco di meridiano sotteso da un angolo di un minuto d’arco e assumendo la Terra sferica, calcolate la distanza della navicella dalla superficie terrestre in km e il suo periodo orbitale. Ipotizzando che dall’Italia sia visibile il transito davanti alla Luna piena della navicella del Maggiore Tom il 19 febbraio 2019, con la Luna al meridiano, calcolate quando si verificherà il transito successivo (giorno e ora) della navicella sul disco della Luna, indicate che fase avrà la Luna e dite se questo fenomeno sarà ancora osservabile dall’Italia. Assumete le orbite di navicella e Luna attorno alla Terra complanari.

Soluzione: dalla definizione di miglio:

$$1 \text{ NM} = \frac{2\pi \cdot R_T}{360 \cdot 60} = \frac{2\pi \cdot 6378 \text{ km}}{360 \cdot 60} = 1.855 \text{ km}$$

la distanza della navicella dalla superficie terrestre (d) è

$$d = 100000 \text{ NM} = 100000 \cdot 1.855 \text{ km} = 185500 \text{ km} = 185.5 \cdot 10^3 \text{ km} = 185.5 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Per calcolare il periodo orbitale della navicella (P_N) utilizziamo la terza legge di Keplero, con $a = d + R_T$:

$$\begin{aligned} P_N &= \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (d + R_T)^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (185.5 \cdot 10^6 \text{ m} + 6378 \cdot 10^3 \text{ m})^3}{G \cdot M_T}} = \\ &= \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot 7.064 \cdot 10^{24} \text{ m}^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}} \cdot 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} \cong 836.6 \cdot 10^3 \text{ s} \cong 9.682 \text{ g} \end{aligned}$$

La Luna piena è visibile al meridiano alla mezzanotte locale, quindi il transito della navicella davanti la Luna è visibile il 19 febbraio 2019 alle 24:00.

Per calcolare quando avviene il transito successivo dobbiamo calcolare il periodo sinodico della navicella rispetto alla Luna (T_{sin_N}). Detto P_L il periodo orbitale della Luna ($P_L=27.32 \text{ g}$):

$$\frac{1}{T_{\text{sin}_N}} = \frac{1}{P_N} - \frac{1}{P_L} = \frac{1}{9.682 \text{ g}} - \frac{1}{27.32 \text{ g}} = 66.70 \cdot 10^{-3} \text{ g}^{-1}$$

da cui

$$T_{\text{sin}_N} = 14.99 \text{ g} = 14\text{g } 23\text{h } 45\text{m}$$

Il transito successivo si verifica il 6 marzo 2019 alle 23:45.

Il periodo sinodico della Luna è 29.53 giorni, quindi se al primo transito la Luna è piena, al transito successivo (dopo 14.99 g che corrispondono circa a metà periodo sinodico della Luna) la Luna è nuova.

La Luna nuova sorge al sorgere del Sole (circa alle 6:00) e tramonta al tramonto del Sole (circa alle 18:00), quindi non è visibile alle 23:45.

Il secondo transito della navicella del Maggiore Tom sul disco della Luna non è visibile dall’Italia perché avviene con la Luna sotto all’orizzonte.



Olimpiadi Italiane di Astronomia 2019

Gara Interregionale – 14/15 febbraio 2019

Alcuni dati di interesse

Tabella 1 – Sole

Raggio medio	695475 km	Età stimata	$4.57 \cdot 10^9$ anni
Massa	$1.99 \cdot 10^{30}$ kg	Classe spettrale	G2 V
Temperatura della fotosfera	5778 K	Posizione nel diagramma HR	Sequenza Principale
Magnitudine apparente dalla Terra	- 26.74	Distanza media dal centro galattico	27000 anni luce
Magnitudine assoluta	+ 4.83	Periodo di rivoluzione intorno al centro galattico	$2.5 \cdot 10^8$ anni

Tabella 2 – Sistema Solare

	Mercurio	Venere	Terra	Luna	Marte	Giove	Saturno	Urano	Nettuno
Raggio medio (km)	2440	6052	6378	1738	3397	71493	60267	25557	24766
Massa (kg)	$3.30 \cdot 10^{23}$	$4.87 \cdot 10^{24}$	$5.97 \cdot 10^{24}$	$7.35 \cdot 10^{22}$	$6.42 \cdot 10^{23}$	$1.90 \cdot 10^{27}$	$5.69 \cdot 10^{26}$	$8.68 \cdot 10^{25}$	$1.02 \cdot 10^{26}$
Semiassse maggiore dell'orbita (km)	$57.91 \cdot 10^6$	$108.2 \cdot 10^6$	$149.6 \cdot 10^6$	$384.4 \cdot 10^3$	$227.9 \cdot 10^6$	$778.4 \cdot 10^6$	$1.427 \cdot 10^9$	$2.871 \cdot 10^9$	$4.498 \cdot 10^9$
Periodo orbitale	87.969 ^g	224.70 ^g	365.26 ^g	27.322 ^g	686.97 ^g	11.863 ^a	29.447 ^a	84.017 ^a	164.79 ^a
Eccentricità dell'orbita	0.2056	0.0068	0.0167	0.0549	0.0934	0.0484	0.0542	0.0472	0.0086
Tipo	roccioso	roccioso	Roccioso	roccioso	roccioso	gassoso	gassoso	gassoso	gassoso

Tabella 3 – Area della superficie e volume per figure geometriche notevoli

area ellisse	area superficie sfera	area superficie cilindro	volume sfera	volume cilindro
$\pi \cdot a \cdot b$	$4\pi \cdot R^2$	$2\pi \cdot R \cdot (h+R)$	$(4/3) \pi \cdot R^3$	$\pi \cdot R^2 \cdot h$

Tabella 4 – Costanti fisiche

Nome	Simbolo	Valore	Unità di misura
Costante di Stefan-Boltzmann	σ	$5.670 \cdot 10^{-8}$	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$
Velocità della luce nel vuoto	c	299792	$km \cdot s^{-1}$
Costante di Gravitazione Universale	G	$6.674 \cdot 10^{-11}$	$m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$
Accelerazione di gravità sulla Terra al livello del mare	g	9.807	$m \cdot s^{-2}$

Tabella 5 – Formule per i triangoli rettangoli

<p>Teorema di Pitagora: $c^2 = a^2 + b^2$</p> <p>Funzioni trigonometriche: $a = c \sin \beta$ $a = c \cos \alpha$ $a = b \tan \beta$</p>

Tabella 6 – Fattori di conversione

1 anno luce = $9461 \cdot 10^9$ km = 0.3066 parsec = 63242 UA
1 parsec = $30857 \cdot 10^9$ km = 3.262 anni luce = 206265 UA
1 radiante $\cong 57^\circ 17' 45'' \cong 206265''$
M (Mega) = 10^6
G (Giga) = 10^9
μ (micro) = 10^{-6}
n (nano) = 10^{-9}
Å (angstrom) = 10^{-10} m

Nota: I valori numerici presenti nelle tabelle sono in notazione scientifica.