



OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2019

Gara Interregionale – 15 febbraio

Categoria Junior 2

1. Una questione di densità



Elencate in ordine di densità i quattro pianeti rocciosi del Sistema Solare, dal meno denso al più denso.

Soluzione.

I quattro pianeti rocciosi del Sistema Solare sono Mercurio, Venere, Terra e Marte.

La densità è data da:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M \cdot 3}{4\pi \cdot R^3}$$

Dai dati in tabella ricaviamo:

$\rho_{\text{mercurio}} \cong 5.42 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\rho_{\text{venere}} \cong 5.24 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\rho_{\text{terra}} \cong 5.49 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\rho_{\text{marte}} \cong 3.91 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
quindi i pianeti rocciosi dal meno denso al più denso sono: Marte, Venere, Mercurio e Terra.

2. Il Sole visto da α Centauri

Sapendo che α Centauri dista dal Sole 4.365 anni luce, calcolate la magnitudine apparente del Sole visto da un pianeta in orbita attorno ad α Centauri.



Soluzione.

Trascurando la distanza del pianeta da α Centauri rispetto alla sua distanza dal Sole ($d = 4.365$ anni luce = 1.338 pc) e assumendo per il pianeta un'atmosfera simile a quella della Terra, dalla relazione che lega magnitudine assoluta a magnitudine apparente ($M = m + 5 - 5 \log d$) ricaviamo:

$$m_{\text{Sole}} = M_{\text{Sole}} - 5 + 5 \log d = 4.84 - 5 + 5 \log 1.338 = 0.47$$

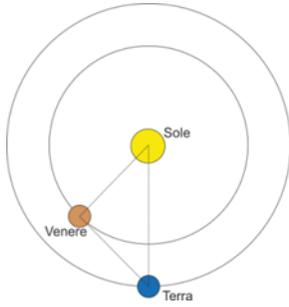
3. L'elongazione di Venere



Assumendo per Terra e Venere orbite circolari, l'elongazione massima di Venere è 46° .

1. Indicate su un disegno la posizione del Sole e della Terra, l'orbita di Venere e la sua posizione quando Venere, visto dalla Terra, appare alla massima elongazione;
2. ricavate dal disegno la corrispondente distanza Terra-Venere;
3. indicate che fase ha Venere quando, osservato dalla Terra, è alla massima elongazione.

Soluzione.



1. La massima elongazione di Venere si ha quando la congiungente Terra-Venere è tangente all'orbita di Venere, come nel disegno qui a lato e nella sua situazione simmetrica (Venere a destra della congiungente Terra-Sole).

2. Abbiamo così un triangolo Terra (T) - Venere (V) - Sole (S). Poiché l'angolo VTS è di 46° (massima elongazione di Venere), l'angolo TVS è retto (proprietà della tangente a una circonferenza) e la distanza Terra - Sole (a) è 1 UA (assumendo orbite circolari), ricaviamo:

$$\text{distanza Terra - Venere} = a \cdot \cos(VTS) = 1 \text{ UA} \cdot \cos(46^\circ) = 0.69 \text{ UA}$$

3. Nella configurazione del disegno la fase di Venere osservata dalla Terra è "primo quarto". Nella configurazione simmetrica la fase di Venere è "ultimo quarto".

4. Un gioco da gatti

La gattina Karel gioca con una pallina di polistirolo espanso che riproduce la Terra in scala 1:159450000. Sapendo che la densità del polistirolo espanso è di 0.04 g/cm^3 , calcolate la massa della pallina in g. Se esistesse un pianeta extrasolare con la densità del polistirolo espanso e la massa della Terra, quale sarebbe il suo raggio in km? Quale sarebbe il rapporto con il raggio della Terra? Inoltre, quale sarebbe il peso di Karel su di esso, sapendo che sulla Terra la gattina pesa 26.5 N?



Soluzione.

Per calcolare la massa della pallina ci serve il suo volume, che poi moltiplicheremo per la densità. Per calcolare il volume, dobbiamo conoscere il raggio della pallina: sappiamo che essa è la riproduzione in scala 1:159450000 della Terra, cioè il raggio della pallina è

$$R = \frac{R_T}{159450000} = \frac{6378 \text{ km}}{159450000} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ km} = 4 \text{ cm}$$

La massa della pallina è:

$$M = V \cdot \rho = \frac{4\pi \cdot R^3 \cdot \rho}{3} = \frac{4\pi \cdot 4^3 \text{ cm}^3 \cdot 0.04 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}{3} = 10.7 \text{ g}$$

Il raggio del pianeta di polistirolo è:

$$R_p = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot M_T}{4\pi \cdot \rho}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5.97 \cdot 10^{27} \text{ g}}{4\pi \cdot 0.04 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}} = \sqrt[3]{3.56 \cdot 10^{28} \text{ cm}^3} = 3.29 \cdot 10^9 \text{ cm} = 3.29 \cdot 10^4 \text{ km} \cong 5.16 R_T$$

L'accelerazione di gravità sul pianeta è data da $g_p = GM_p/R_p^2 = 0.37 \text{ m/s}^2$.

Ricaviamo la massa di Karel dal suo peso sulla Terra: $m_K = P_{KT}/g_T = 26.4 \text{ N} / (9.81 \text{ m/s}^2) = 2.69 \text{ kg}$

Infine possiamo ricavare il peso della gattina sul pianeta: $P_{Kp} = m_K g_p = 2.69 \text{ kg} \cdot 0.37 \text{ m/s}^2 = 0.99 \text{ N}$

5. Un sistema di stelle di neutroni



PSR B1913+16 è un sistema binario composto da due stelle di neutroni identiche perfettamente sferiche ciascuna con densità media $\rho = 1.965 \cdot 10^{11} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$ e massa $M = 2.831 \cdot 10^{30} \text{ kg}$. Le due stelle ruotano su un'orbita circolare con un periodo $P = 7.7542$ ore, che attualmente diminuisce di 55 secondi ogni anno.

Calcolate:

1. il raggio, in km, delle due stelle di neutroni;
2. il valore attuale del semiasse maggiore dell'orbita;
3. la velocità con cui attualmente le due stelle si muovono sull'orbita;
4. di quanto diminuisce dopo un anno il semiasse maggiore dell'orbita.

Soluzione.

1. Poiché il volume di una sfera è dato dalla relazione:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{M}{\rho},$$

ricaviamo per il raggio delle due stelle:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2.831 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{4 \cdot \pi \cdot 1.965 \cdot 10^{11} \text{ kg/cm}^3}} = 1.509 \cdot 10^6 \text{ cm} = 15.09 \text{ km}$$

2. Il periodo di rivoluzione del sistema vale attualmente $P = 7.7542 \text{ ore} = 27915 \text{ s}$. Possiamo ricavare il valore del semiasse maggiore dell'orbita (ovvero il raggio visto che l'orbita è circolare) dalla III legge di Keplero:

$$a = \sqrt[3]{\frac{G \cdot 2M \cdot P^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 5.662 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot 7.7925 \cdot 10^8 \text{ s}^2}{39.478}} \cong 1.954 \cdot 10^9 \text{ m}$$

$$= 1.954 \cdot 10^6 \text{ km}$$

3. La lunghezza dell'orbita per ciascuna stella è:

$C = 2\pi a \cong 1.228 \cdot 10^7 \text{ km}$, per cui la velocità lungo l'orbita vale:

$$V = \frac{C}{P} = \frac{1.228 \cdot 10^7 \text{ km}}{27915 \text{ s}} \cong 440 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

4. Dopo un anno il periodo di rivoluzione varrà $P_1 = P - 55 = 27860 \text{ s}$ e la lunghezza del semiasse maggiore dell'orbita (a_1) sarà:

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{G \cdot 2M \cdot P_1^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 5.662 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot 7.7618 \cdot 10^8 \text{ s}^2}{39.478}} \cong 1.951 \cdot 10^9 \text{ m}$$

$$= 1.951 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Quindi dopo un anno il semiasse maggiore sarà diminuito di circa $\Delta a = a - a_1 = 3000 \text{ km}$.



Olimpiadi Italiane di Astronomia 2019

Gara Interregionale – 14/15 febbraio 2019

Alcuni dati di interesse

Tabella 1 – Sole

| | | | | |
|-----------------------------------|-------------------------|--|--|------------------------|
| Raggio medio | 695475 km | | Età stimata | $4.57 \cdot 10^9$ anni |
| Massa | $1.99 \cdot 10^{30}$ kg | | Classe spettrale | G2 V |
| Temperatura della fotosfera | 5778 K | | Posizione nel diagramma HR | Sequenza Principale |
| Magnitudine apparente dalla Terra | - 26.74 | | Distanza media dal centro galattico | 27000 anni luce |
| Magnitudine assoluta | + 4.83 | | Periodo di rivoluzione intorno al centro galattico | $2.5 \cdot 10^8$ anni |

Tabella 2 – Sistema Solare

| | Mercurio | Venere | Terra | Luna | Marte | Giove | Saturno | Urano | Nettuno |
|-------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| Raggio medio (km) | 2440 | 6052 | 6378 | 1738 | 3397 | 71493 | 60267 | 25557 | 24766 |
| Massa (kg) | $3.30 \cdot 10^{23}$ | $4.87 \cdot 10^{24}$ | $5.97 \cdot 10^{24}$ | $7.35 \cdot 10^{22}$ | $6.42 \cdot 10^{23}$ | $1.90 \cdot 10^{27}$ | $5.69 \cdot 10^{26}$ | $8.68 \cdot 10^{25}$ | $1.02 \cdot 10^{26}$ |
| Semiassse maggiore dell'orbita (km) | $57.91 \cdot 10^6$ | $108.2 \cdot 10^6$ | $149.6 \cdot 10^6$ | $384.4 \cdot 10^3$ | $227.9 \cdot 10^6$ | $778.4 \cdot 10^6$ | $1.427 \cdot 10^9$ | $2.871 \cdot 10^9$ | $4.498 \cdot 10^9$ |
| Periodo orbitale | 87.969 ^g | 224.70 ^g | 365.26 ^g | 27.322 ^g | 686.97 ^g | 11.863 ^a | 29.447 ^a | 84.017 ^a | 164.79 ^a |
| Eccentricità dell'orbita | 0.2056 | 0.0068 | 0.0167 | 0.0549 | 0.0934 | 0.0484 | 0.0542 | 0.0472 | 0.0086 |
| Tipo | roccioso | roccioso | roccioso | roccioso | roccioso | gassoso | gassoso | gassoso | gassoso |

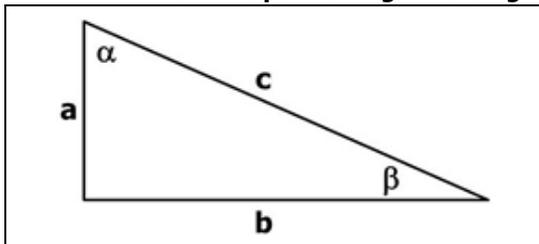
Tabella 3 – Area della superficie e volume per figure geometriche notevoli

| area ellisse | area superficie sfera | area superficie cilindro | volume sfera | volume cilindro |
|-----------------------|-----------------------|----------------------------|-----------------------|-------------------------|
| $\pi \cdot a \cdot b$ | $4\pi \cdot R^2$ | $2\pi \cdot R \cdot (h+R)$ | $(4/3) \pi \cdot R^3$ | $\pi \cdot R^2 \cdot h$ |

Tabella 4 – Costanti fisiche

| Nome | Simbolo | Valore | Unità di misura |
|--|----------|------------------------|----------------------------------|
| Costante di Stefan-Boltzmann | σ | $5.670 \cdot 10^{-8}$ | $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$ |
| Velocità della luce nel vuoto | c | 299792 | $km \cdot s^{-1}$ |
| Costante di Gravitazione Universale | G | $6.674 \cdot 10^{-11}$ | $m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$ |
| Accelerazione di gravità sulla Terra al livello del mare | g | 9.807 | $m \cdot s^{-2}$ |

Tabella 5 – Formule per i triangoli rettangoli



Teorema di Pitagora: $c^2 = a^2 + b^2$

Funzioni trigonometriche:

$$a = c \sin \beta \quad a = c \cos \alpha \quad a = b \tan \beta$$

Tabella 6 – Fattori di conversione

1 anno luce = $9461 \cdot 10^9$ km = 0.3066 parsec = 63242 UA

1 parsec = $30857 \cdot 10^9$ km = 3.262 anni luce = 206265 UA

1 radiante $\cong 57^\circ 17' 45'' \cong 206265''$

M (Mega) = 10^6

G (Giga) = 10^9

μ (micro) = 10^{-6}

n (nano) = 10^{-9}

Å (angstrom) = 10^{-10} m

Nota: I valori numerici presenti nelle tabelle sono in notazione scientifica.