OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2017

Gara Interregionale – 14 febbraio

Categoria Senior

1. La “Rotta di Kessel”.

Nel film “Star Wars IV”, Han Solo si vanta di aver percorso la “rotta di Kessel in meno di 12 parsec”. Essendo il parsec una misura di lunghezza, l’affermazione non ha senso, a meno che Han non intenda un’ipotetica misura di tempo in *parsec/velocità*, definita come il tempo necessario a percorrere un parsec alla velocità della sua nave spaziale nell’iperspazio. Secondo questa definizione, assumendo una velocità v = c · 10^5, a quanto equivarrebbe il tempo riferito da Han Solo?

Soluzione.
Un parsec = 206265 UA = 30857 · 10^9 km.
Il tempo necessario per percorrere 12 parsec alla velocità v = c ·10^5 vale:

$$t = \frac{12 \cdot 30857 \cdot 10^9}{299792 \cdot 10^5} = 12351\ s\ \cong \boldsymbol{3h\ 26\ m}.$$

Secondo questa interpretazione il Millennium Falcon avrebbe percorso la rotta di Kessel in meno di 3 ore e mezza.

2. L’interno della Terra.

Ricavare la densità media della Terra sapendo che l’accelerazione di gravità media alla sua superficie vale g = 9.81 m/s^2. Poiché la densità delle rocce della crosta terrestre è di 3.0 g/cm^3, cosa si può dedurre sulla composizione dell’interno terrestre?

Soluzione.
Dette ρ la densità media e V il volume della Terra si ha: M = ρ V e quindi ρ = M/ V.
Poiché g = GM/R^2, avremo M = gR^2/G e quindi:

$$\rho = \frac{g \cdot R^2}{G\left(\frac{4}{3}\pi\, R^3\right)} = \frac{3 \cdot g}{4\,\pi \cdot G \cdot R}$$ = = 5500 kg/m^3 = **5.5 g/cm^3**

Se ne conclude che **le rocce dell’interno terrestre devono essere molto più dense di quelle della crosta**.

3. Una stella e il suo pianeta.

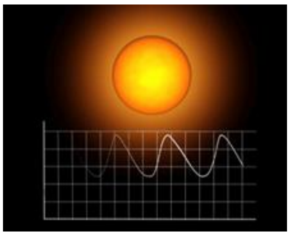
Intorno a una stella a 10 anni luce dal Sole è stato scoperto un pianeta di massa M_A = 6.5 · 10^{24} kg, che percorre intorno ad essa in 20 anni un’orbita circolare, perpendicolare alla direzione di osservazione, il cui semiasse maggiore sottende un angolo α = 4”.890. Si calcoli la massa della stella in unità di masse solari. Quanto varrebbe il periodo di rivoluzione del pianeta se orbitasse intorno al Sole?

Soluzione.
Poiché l’orbita è perpendicolare alla direzione di osservazione il semiasse maggiore (a) dell’orbita del pianeta vale:
a = D tan α = 2.371 · 10^{-4} anni luce = 224.3 · 10^7 km = 224.3 · 10^{10} m.
Detta M_s la massa della stella, dalla terza legge di Keplero generalizzata:

$$M_s + M_A = \frac{4\,\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2} = \frac{39.48 \cdot 1.128 \cdot 10^{37}}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 3.984 \cdot 10^{17}} = 1.68\ \cdot\ 10^{31}\ kg$$

Poiché la massa del pianeta è chiaramente trascurabile rispetto alla massa totale avremo:
M_s = 1.68 ·10^{31} kg = 8.44 $M_\odot$.
La distanza pianeta-stella è 15 UA, se il pianeta ruotasse intono al Sole il suo periodo orbitale si potrebbe ricavare dalla relazione $T = \sqrt{a^3}$ (con “T” in anni e “a” in UA) e varrebbe circa **58 anni**.

4. La stella variabile.



Si consideri una stella variabile "pulsante" la cui magnitudine assoluta varia nell'intervallo: $M_1 = 3.25$ e $M_2 = 2.26$, con una temperatura effettiva che al massimo di luminosità è $T_2 = 5500$ K e al minimo di luminosità è $T_1 = 5000$ K. Calcolare quanto varia il raggio della stella tra il minimo e il massimo di luminosità. Esprimere il risultato come rapporto tra raggio massimo e raggio minimo e come differenza tra i due raggi in km.

Soluzione.

La luminosità di una stella è definita dalla relazione: $L = 4\,\pi\,R^2\,\sigma\,T^4$.

Per ricavare il rapporto tra i raggi al massimo e minimo di luminosità utilizziamo la formula di Pogson:

$$M_2 - M_1 = -2.5\log\left(\frac{L_2}{L_1}\right) = -2.5\log\left(\frac{4\,\pi\,R_2^2\,\sigma\,T_2^4}{4\,\pi\,R_1^2\,\sigma\,T_1^4}\right) = -2.5\log\left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4\right] \qquad \text{e quindi:}$$

$$0.396 = \log\left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4\right] = log\left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \cdot 1.464\right] \qquad \text{da cui:} \quad 0.396 = 2\log\frac{R_2}{R_1} + \log 1.464$$

ovvero: $0.115 = log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ e infine $\left(\boldsymbol{\frac{R_2}{R_1}}\right) = \mathbf{1.30}$

Per ottenere la differenza in km, calcoliamo il raggio della stella al massimo di luminosità confrontando i suoi dati con una stella di caratteristiche note: il Sole. Avremo quindi:

$$M_2 - M_\odot = -2.5\log\left[\left(\frac{R_2}{R_\odot}\right)^2\left(\frac{T_2}{T_\odot}\right)^4\right] \qquad \text{e quindi:} \quad 1.03 = 2\log R_2 - 2\log R_\odot + 4\log 0.9519$$

da cui si ricava: $R_2 = 2513 \cdot 10^3\ km \cong 3.61\,R_\odot$ e $R_1 = 1933 \cdot 10^3\ km \cong 2.78\,R_\odot$

la variazione del raggio in km vale quindi: **ΔR = 580 · 10^3 km**

5. Giove e i satelliti Medicei.

L'immagine a sinistra mostra Giove e i satelliti Medicei. Da Est (E) verso Ovest (W) – da sinistra verso destra – sono visibili, nell'ordine: Ganimede, Io, Giove, Europa e Callisto. Le distanze angolari dei satelliti dal centro del pianeta sono:

1. Ganimede – Giove = 2′ 56″
2. Io – Giove = 2′
3. Europa – Giove = 2′ 25″
4. Callisto – Giove = 2′ 47″

Supponiamo di osservare Giove e i suoi quattro satelliti con un telescopio di apertura D = 200 mm e rapporto focale f/10, sul cui piano focale è posta una camera fotografica il cui CCD ha dimensioni 2048 x 2048 pixels con ciascun pixel di forma quadrata e lato lpix = 6.4 micron (μm). Verificare se con questa strumentazione è possibile far rientrare nel campo del CCD l'immagine completa di Giove con i suoi quattro satelliti medicei.

Soluzione.

La distanza angolare tra i 2 satelliti più esterni in direzione E-W (Ganimede e Callisto) è chiaramente maggiore della distanza in direzione N-S. Essendo il CCD quadrato per ottenere un'immagine completa di Giove con i satelliti Medicei è necessario che, con buona approssimazione, la somma delle distanze angolari da Giove dei 2 satelliti più esterni sia inferiore all'angolo che, con il telescopio utilizzato, le dimensioni del lato del CCD sottendono in cielo.

La distanza angolare tra Ganimede e Callisto vale: $\Delta_{\text{Ganimede-Callisto}}$ = 2′ 56″ + 2′ 47″ = 5′ 43″= 343″.

La focale del telescopio vale: F = 10 · 200 = 2000 mm = 200 cm.

Il rivelatore CCD della camera è un quadrato con lato pari a: L = 2048 · l_{pix} = 2048 · 6.4 μm = 1.31 cm

Queste dimensioni lineari sul piano focale corrispondono a un angolo nel cielo di:

$$\alpha = arctag\frac{L}{F} = 0°.375 = 22'.5 = \mathbf{1350''}$$

È quindi possibile ottenere un'immagine in cui compaiono Giove insieme con i suoi quattro satelliti Medicei.