Problema 9. L'orbita di una cometa *(problema nr. 2, categoria Junior, Finale Nazionale 2011)*

La Cometa di Encke (2P/Encke), osservata per la prima volta da Pierre Mechain nel 1786, percorre intorno al Sole un'orbita con un'eccentricità e = 0.8471 e un periodo P = 3.303 anni. Calcolare la sua distanza dal Sole quando si trova al perielio e quando si trova all'afelio.

Parole o espressioni chiave: orbita, eccentricità, periodo, anni, distanza dal Sole, perielio, afelio

Dati non necessari: *cometa, Encke, prima volta, Pierre Mechain, 1786*

Cenni alla teoria: *La I Legge di Keplero e le proprietà delle orbite ellittiche. La III Legge di Keplero*

Le Leggi di Keplero descrivono le caratteristiche del moto dei pianeti intorno al Sole (e, più in generale, del moto di due corpi legati dalla sola attrazione gravitazionale). Esse stabiliscono che:

I Legge di Keplero: *Ogni pianeta esegue un moto di rivoluzione intorno al Sole su un'orbita ellittica giacente su un piano, e di cui il Sole occupa uno dei fuochi*

II Legge di Keplero: *Durante il moto, la congiungente Sole-Pianeta spazza aree uguali in tempi uguali*

III Legge di Keplero: *Per tutti i pianeti, il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore ed il quadrato del periodo di rivoluzione è costante*

La prima legge lega le caratteristiche del moto orbitale dei pianeti alle caratteristiche dell'ellisse. In particolare la distanza del pianeta dal Sole non è costante (salvo il caso particolare in cui l'orbita sia circolare), ma varierà tra una distanza minima d_p (perielio) e una distanza massima d_a (afelio). Queste due distanze, che possono essere misurate, sono legate al semiasse maggiore a dell'orbita e alla sua eccentricità e per mezzo delle semplici relazioni

$$d_a = a \cdot (1 + e)$$
$$d_p = a \cdot (1 - e)$$

dalle quali è possibile viceversa ricavare il semiasse maggiore a e l'eccentricità e, una volta misurate le distanze dal Sole all'afelio e al perielio:

$$a = \frac{d_a + d_p}{2} \qquad\qquad e = \frac{d_a - d_p}{d_a + d_p}$$

Una volta noto il semiasse maggiore a, la III Legge di Keplero permette di conoscere immediatamente il periodo di rivoluzione P del pianeta Per effettuare il calcolo, basta operare il confronto con le grandezze terrestri (esprimendo il periodo in anni, *P=1 anno*, ed il semiasse in Unità Astronomiche, *a=1 UA*), ottenendo

$$\frac{a^3}{P^2} = 1$$

oppure conoscendo la massa del Sole M e la costante di gravitazione universale G, per mezzo dell'espressione

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

Naturalmente è possibile fare il percorso inverso, ad esempio conoscendo il periodo e quindi ricavando il semiasse maggiore dell'orbita, e così via.

Soluzione.

Il semiasse maggiore a dell'orbita della Cometa si trova applicando la III legge di Keplero:

$$a^3 \text{ (UA)} = P^2 \text{ (anni)} = (3.303)^2 = 10.9098 \text{ UA}$$

da cui $a = 2.218$ UA .

Questo risultato ci fornisce il valore della somma delle distanze all'afelio (d_a) e al perielio (d_p) giacché:

$$d_a + d_p = 2a$$

ovvero $d_a + d_p = 4.436$ UA.

Dalla definizione di eccentricità e, del resto, sappiamo che:

$$e = (d_a - d_p) / (d_a + d_p)$$

per cui possiamo subito ricavare la differenza delle due distanze d_a e d_p:

$$d_a - d_p = e \cdot (d_a + d_p) = 0.8471 \cdot 4.436 \text{ UA} = 3.758 \text{ UA}$$

Abbiamo quindi i dati per mettere a sistema le due espressioni d_a+d_p e d_a-d_p, da cui ricaviamo facilmente le distanze dal Sole della Cometa di Encke al perielio e all'afelio:

$$d_p = \frac{(d_a+d_p)-(d_a-d_p)}{2} = \frac{4.436-3.758}{2} = 0.339\ UA$$

$$d_a = \frac{(d_a+d_p)+(d_a-d_p)}{2} = \frac{4.436+3.758}{2} = 4.097\ UA$$