Problema 6. Alla deriva *(problema nr. 4, categoria Senior, Finale Nazionale 2014)*

Per un errore di manovra, l'astronave Enterprise di Star Trek si viene a trovare alla distanza di 200.000 anni luce dal centro della galassia di Andromeda. Per sfuggire all'attrazione gravitazionale della galassia, il comandante Kirk deve imprimere all'astronave una opportuna velocità minima.

Quale è questo valore? Si consideri che il comandante, pur ricordando che la massa M_g della galassia di Andromeda è pari a $1.023 \cdot 10^{12}$ masse solari, non ha molto tempo a disposizione per effettuare calcoli dettagliati e quindi per semplicità ipotizza che la materia nella galassia abbia simmetria sferica.

Parole o espressioni chiave: distanza, anno luce, attrazione gravitazionale, velocità minima, massa, masse solari, simmetria sferica

Dati non necessari: *astronave, galassia, Andromeda*

Cenni alla teoria: *La velocità di fuga*

Quando lanciamo un oggetto in verticale, osserviamo che esso raggiunge un'altezza massima, alla quale si ferma per un istante, per poi invertire il senso del moto e ricadere. Se ripetiamo il lancio più volte, imprimendo al corpo una spinta via via maggiore al momento del lancio, osserveremo che esso raggiunge altezze via via maggiori, prima di ricadere ogni volta. Ne deduciamo che, con spinte (ovvero velocità iniziali) opportune, il nostro oggetto potrebbe raggiungere i confini del Sistema Solare prima di tornare indietro, o addirittura la stella più vicina, o la galassia più vicina, e così via… prima di tornare indietro. Naturalmente questo ragionamento presume che nell'Universo esista solo il nostro pianeta e null'altro, altrimenti l'oggetto lanciato potrebbe essere attratto, ad un certo punto, da qualche altro corpo celeste. Ma è un ragionamento corretto, che ci porta ad una fondamentale deduzione: da una certa velocità iniziale in poi, l'oggetto lanciato continuerà ad allontanarsi indefinitamente, senza mai raggiungere un' "altezza massima" e quindi senza mai più tornare indietro.

La minima velocità che deve essere impressa all'oggetto, in assenza di ulteriore propulsione e di attrito, affinché esso possa allontanarsi indefinitamente dal campo gravitazionale, è detta **velocità di fuga** (o anche seconda velocità cosmica) e si indica con $\mathbf{v_f}$.

Consideriamo un corpo di massa trascurabile sulla superfice di un pianeta di massa M e raggio R, o posto comunque ad una distanza R da una massa M (che può essere un pianeta, una stella, una galassia, un ammasso di galassie…). L'espressione di v_f si ricava dal principio di conservazione dell'energia meccanica, assumendo che la velocità finale del corpo sia nulla (che è ciò che accade alla "massima altezza") a distanza infinita dalla massa M, ed è data da

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

dove G è la costante di gravitazione universale.

Soluzione

Il capitano Kirk deve ovviamente imprimere all'astronave Enterprise una velocità pari alla velocità di fuga dal campo gravitazionale della galassia di Andromeda, calcolata considerando l'intera massa della galassia (per l'ipotesi semplificativa di simmetria sferica) e alla distanza dell'astronave dal

centro della galassia stessa.
L'espressione della velocità di fuga è data da:

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Trasformiamo quindi la distanza *d* in metri e la massa M_g in kg:

$d = 200000 \cdot 9.46 \cdot 10^{15}$ m $= 1.892 \cdot 10^{21}$ m

$M_g = 1.023 \cdot 10^{12} \cdot 1.99 \cdot 10^{30} = 2.03 \cdot 10^{42}$ kg

Sostituendo i valori così trovati, si ottiene infine:

$v_f = 3.78 \cdot 10^5$ m/s = 378 km/s