OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2019

Finale Nazionale – 16 Aprile

Prova Teorica - Categoria Senior

1. Il tempo siderale a La Silla

Calcolare il tempo siderale medio TSM di Greenwich, quando per un osservatore posto presso l'Osservatorio ESO di La Silla (Cile), le cui coordinate geografiche sono: longitudine λ=70° 43' 52".8 W e latitudine φ=29° 15' 40".2 S, il tempo siderale locale è: ts = 10h 15m 45s

Soluzione:

Il tempo siderale locale è la somma del tempo siderale di Greenwich e la longitudine del luogo. Quest'ultima è negativa se a ovest di Greenwich (W = longitudine ovest) e positiva se a est di Greenwich (E = longitudine est).

Si ha dunque: t_s = TSM + λ, da cui TSM = t_s - λ. Nel nostro caso, essendo La Silla a ovest di Greenwich,

λ = 70° 43' 52" W = -70° 43' 52" = -70°.73133 = $-4^h.8756 \approx -4^h\, 42^m\, 56^s$.

TSM = $10^h\, 15^m\, 45^s + 4^h\, 42^m\, 56^s = 14^h\, 58^m\, 41^s$

2. Satelliti in orbita marziana

Intorno a Marte vengono messi in orbita due satelliti. Il primo su un'orbita circolare di raggio a = $4.01 \cdot 10^3$ km, il secondo su un'orbita ellittica con periastro (distanza minima da Marte) $d_P = 4.01 \cdot 10^3$ km e apoastro (distanza massima da Marte) $d_A = 25.11 \cdot 10^3$ km. Calcolare:

1) la velocità con cui il primo satellite percorre l'orbita circolare;
2) le velocità del secondo satellite al periastro e all'apoastro.

Soluzione:

1) La velocità sull'orbita circolare (v_c) si ottiene uguagliando la forza centripeta a quella di gravità:

$$m \cdot \frac{v^2}{a} = G\,\frac{mM}{a^2} \quad \text{da cui} \quad v_c = \sqrt{\frac{G \cdot M_{Marte}}{a}} = \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 6.42 \cdot 10^{23}}{4.01 \cdot 10^6}} \cong 3270\,\frac{m}{s} = 3.27\,\frac{km}{s}$$

2) Per ricavare le velocità del satellite che si muove sull'orbita ellittica, ricordiamo che l'energia meccanica totale si conserva e, in particolare, il suo valore all'apoastro è uguale al suo valore al periastro. Indicando con i pedici "a" e "p" i valori all'apoastro e al periastro, avremo rispettivamente:

$$\frac{1}{2} m v_a^2 - G\frac{Mm}{d_a} = \frac{1}{2} m v_p^2 - G\frac{Mm}{d_p}$$

ricordando che: $d_a = a(1+e)$ e $d_p = a(1-e)$ avremo infine:

$$\frac{1}{2} v_a^2 - \frac{G \cdot M}{a(1+e)} = \frac{1}{2} v_p^2 - \frac{G \cdot M}{a(1-e)}$$

Inoltre, dalla II Legge di Keplero sappiamo che vale la relazione: $v_a \cdot a\,(1+e) = v_p \cdot a\,(1-e)$

Con pochi semplici passaggi si ricava:

$$v_p = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} = v_c\sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} \quad e \quad v_a = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} = v_c\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}$$

Dove v_c è la velocità su un'orbita circolare di raggio "a". Per il secondo satellite abbiamo:

$$a_2 = \frac{d_P + d_A}{2} = \frac{4.01 \cdot 10^3 \text{ km} + 25.11 \cdot 10^3 \text{ km}}{2} = 14.56 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$$v_{c2} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{Marte}}{a}} = \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 6.42 \cdot 10^{23}}{14.56 \cdot 10^6}} \cong 1720 \frac{m}{s} = 1.72 \frac{km}{s}$$

L'eccentricità dell'orbita del secondo satellite si ricava dalla relazione:

$$e = \frac{d_a - d_p}{d_a + d_p} = \frac{25.1 \cdot 10^3 - 4.01 \cdot 10^3}{25.1 \cdot 10^3 + 4.01 \cdot 10^3} = 0.724$$

da cui:

$$\sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} = \sqrt{\frac{1.724}{0.276}} \cong 2.50 \quad e \quad \sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} = \sqrt{\frac{0.276}{1.724}} \cong 0.400$$

e infine:

$$v_{p2} \cong 4.23 \frac{km}{s} \qquad e \qquad v_{a2} \cong 0.69 \frac{km}{s}$$

3. Dracula incenerito dalla Luna piena

Una delle principali caratteristiche dei vampiri è che essi si inceneriscono se esposti alla luce del Sole. Nella vignetta qui a fianco Dracula è polverizzato dalla luce della Luna piena, che riflette la luce del Sole.

1) Considerando che la Luna riflette solo il 7% circa della luce del Sole (l'albedo media "A" della Luna è infatti A ≅ 0.07) e supponendo che Dracula riesca a sopportare senza incenerirsi un flusso di energia pari ad appena mezzo milionesimo ($0.5 \cdot 10^{-6}$) del flusso del Sole che arriva sulla Terra, dire se la situazione della vignetta può effettivamente verificarsi. Considerare la distanza Luna-Sole uguale alla distanza Terra-Sole.
2) Se il sistema Terra-Luna, mantenendo immutate le sue caratteristiche, si trovasse a una distanza dal Sole pari a quella di Marte, che ne sarebbe di Dracula in una notte di Luna piena?

Soluzione:

1) Calcoliamo il flusso di energia solare riflessa dalla Luna piena che arriva sulla Terra. Occorre per prima cosa calcolare la costante solare (α), ovvero la quantità di energia emessa dal Sole che arriva sulla Terra per unità di tempo e unità di superficie (quindi una potenza per unità di superficie), misurata sulla superficie superiore dell'atmosfera terrestre, su un piano perpendicolare ai raggi solari.
   Dalla legge di Stefan-Boltzmann, detta "D_T" la distanza media Terra-Sole, otteniamo:
   $$\alpha = \frac{4\,\pi\, R_{Sole}^2\, \sigma\, T_{Sole}^4}{4\,\pi\, {D_T}^2} = \frac{4\,\pi \cdot 4.837 \cdot 10^{17} \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \cdot 1.115 \cdot 10^{15}}{4\,\pi \cdot 2.238 \cdot 10^{22}} \cong 1366 \frac{W}{m^2}$$
   che è anche il valore del flusso del Sole su un 1 m^2 della superficie della Luna avendo assunto i due corpi alla stessa distanza dal Sole.
   La Luna è piena, ma poiché il flusso si riferisce a superfici perpendicolari alla direzione della luce in arrivo, l'area interessata dall'arrivo del flusso solare e dalla successiva riflessione equivale alla proiezione di una semisfera su un piano perpendicolare alla direzione di arrivo della radiazione. Questa proiezione è un cerchio.

La potenza totale riflessa (W_{RIF}) dalla superficie della Luna si ottiene moltiplicando il valore della costante solare per l'area proiettata della superficie lunare (ovvero la potenza ricevuta su tutta la superficie proiettata, W_{RIC}) per l'albedo:

$$W_{RIF} = W_{RIC} \cdot A = \alpha \cdot \pi R_{LUNA}^2 \cdot A = 1366 \cdot \pi \cdot 3.021 \cdot 10^{12} \cdot 0.07 \cong 9.08 \cdot 10^{14}\ W$$

Questa potenza riflessa si distribuisce su mezzo angolo solido totale (perché è riflessa da una sola faccia), cioè si distribuisce su semisfere concentriche sempre più grandi a partire dalla Luna. Alla distanza della Terra (d) su 1 m^2 si riceverà allora in media dalla Luna un flusso (F_{RIC}) dato da:

$$F_{RIC} = \frac{W_{RIF}}{2\,\pi\,d^2} = \frac{9.08 \cdot 10^{14}}{2\,\pi \cdot 1.478 \cdot 10^{17}} \cong 9.78 \cdot 10^{-4}\ \frac{W}{m^2} \cong 0.716 \cdot 10^{-6}\,\alpha$$

Che significa che dalla Luna in una notte di Luna piena sulla Terra si riceve un flusso che è quasi un milionesimo di quello che si riceve dal Sole. Dato che nella nostra ipotesi Dracula riesce a sopportare senza incenerirsi soltanto mezzo milionesimo ($0.5 \cdot 10^{-6}$) del flusso che arriva dal Sole, la situazione nella vignetta è corretta. La luce della Luna piena polverizza effettivamente il povero vampiro.

2) Calcoliamo adesso il valore della costante solare (β) alla distanza (D_M) di Marte:

$$\beta = \frac{4\,\pi\ R_{Sole}^2\,\sigma\,T_{Sole}^4}{4\,\pi\,{D_M}^2} = \frac{4\,\pi \cdot 4.837 \cdot 10^{17} \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \cdot 1.115 \cdot 10^{15}}{4\ \pi \cdot 5.194 \cdot 10^{22}} \cong 589\ \frac{W}{m^2} \cong 0.43\,\alpha$$

In questo caso la potenza riflessa dalla Luna (W_{rif}) sarebbe:

$$W_{rif} = W_{ric} \cdot A = \beta \cdot \pi R_{LUNA}^2 \cdot A = 589 \cdot \pi \cdot 3.021 \cdot 10^{12} \cdot 0.07 \cong 3.91 \cdot 10^{14}\ W$$

e sulla Terra arriverebbe dalla Luna un flusso:

$$F_{ric} = \frac{W_{rif}}{2\,\pi\,d^2} = \frac{3.91 \cdot 10^{14}}{2\,\pi \cdot 1.478 \cdot 10^{17}} \cong 4.21 \cdot 10^{-4}\ \frac{W}{m^2} \cong 0.308 \cdot 10^{-6}\,\alpha$$

Quindi se il sistema Terra-Luna fosse alla distanza di Marte, Dracula sarebbe salvo**!**

4. L'eclisse totale di Sole del 2017

La figura a destra mostra il percorso della fascia di totalità dell'eclisse di Sole del 21 agosto 2017 osservata da una costa all'altra degli USA. La fase di totalità ha iniziato a essere visibile sulla costa ovest alle ore 17:15 UTC e si è poi spostata verso la costa est.

1. Come è noto, la Terra ruota intorno a se stessa da ovest verso est. Spiegare (con l'ausilio di una figura) perché l'ombra della Luna durante un'eclisse si sposta anch'essa da ovest a est sul globo terrestre.

2) Calcolare quanto tempo ha impiegato l'ombra della Luna per attraversare gli USA da costa a costa, assumendo la distanza del Sole infinita, l'orbita della Luna circolare e sapendo che la distanza della costa ovest dalla costa est degli USA alla latitudine media della fascia di totalità dell'eclisse (φ = 40°) è di circa 5000 km.

Soluzione:

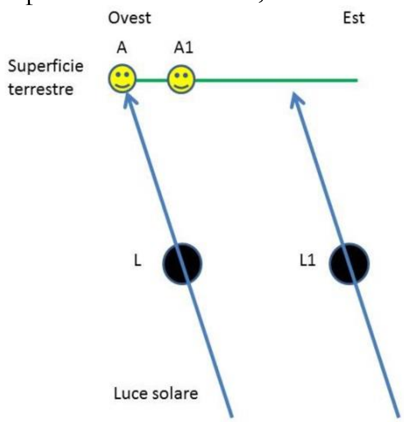
1) La Luna ruota intorno alla Terra con un periodo T = 27.322 giorni = $2.36 \cdot 10^6$ s, quindi in prima approssimazione e considerando l'orbita circolare la velocità tangenziale della Luna sulla sua orbita è:

$$V_{Luna} = \frac{2\,\pi\,D_{Luna}}{T} = \frac{2\,\pi \cdot 384.4 \cdot 10^3}{2.36 \cdot 10^6} \cong 1.02\ \frac{km}{s}$$

Il periodo di rotazione della Terra è P = 23h 56m 4s = 86164 s. Quindi detto R_T il raggio della Terra, la velocità lineare di un punto sulla superficie alla latitudine φ = 40° è:

$$V_{Terra-40} = \frac{2\,\pi \cdot R_{Terra} \cdot \cos\varphi}{P} = \frac{2\,\pi \cdot 6378 \cdot 0.766}{86164} \cong 0.356\ \frac{km}{s}$$

Osservata dalla superficie della Terra la Luna si muove in cielo da est verso ovest a causa della rotazione terrestre, ma da ovest verso est rispetto al Sole. Possiamo già da questo dedurre che durante un'eclisse totale la sua ombra si muoverà anch'essa da ovest verso est sulla superficie della Terra. Come richiesto, realizziamo anche un disegno schematico in cui assumiamo una porzione molto piccola della superficie della Terra, in modo da poterne trascurare la curvatura.



Consideriamo un osservatore nella posizione "A" che sta osservando la fase di totalità. Dopo un certo intervallo di tempo la posizione dell'osservatore sarà, a causa della sola rotazione della Terra in "A1". Nello stesso intervallo di tempo, a causa della maggiore (di circa 2.87 volte) velocità lineare, la Luna si sarà mossa, da "L" a "L1", di una quantità maggiore di quanto non ha fatto l'osservatore e quindi la sua ombra non sarà più visibile dall'osservatore, essendosi spostata più a est rispetto alla sua nuova posizione. Poiché abbiamo assunto il Sole a distanza infinita la luce solare si mantiene parallela a se stessa, ma le conclusioni non cambierebbero anche assumendo per il Sole la distanza corretta.

2) Poiché sappiamo che un'eclisse totale in una data località dura solo pochi minuti, assumendo la distanza del Sole come infinita rispetto alla distanza Terra-Luna, possiamo dedurre, con buona approssimazione, che l'ombra della Luna sul globo terrestre alla latitudine φ = 40° si sposta a una velocità lineare relativa:

$$V_r \cong V_{Luna} - V_{Terra-40} \cong 0.66\ \frac{km}{s}$$

Pertanto, detta D_{OE} la distanza tra le due coste degli USA, l'ombra ha impiegato un tempo (t) di:

$$t = \frac{D_{OE}}{V_r} = \frac{5000}{0.66} \cong 7580\ s \cong 2h\ 6m$$

per coprire la distanza da costa a costa. Quindi sulla costa est l'eclisse è stata osservata alle 19:21 UTC.
Nota: l'ora esatta in cui l'eclisse ha avuto luogo sulla costa est è stata 19:10 UTC, la differenza rispetto a quanto qui calcolato è dovuta alle approssimazioni usate, ma il tempo ottenuto è comunque un'ottima stima del valore vero.

5. Il transito di Venere

Premessa storica: fino alla metà del XVIII secolo gli astronomi non conoscevano le dimensioni *assolute* del Sistema Solare, ma solo le sue dimensioni *relative*, ovvero le proporzioni fra le diverse distanze che si potevano ottenere dalla III legge di Keplero. Una delle prime misure assolute della distanza tra Terra e Sole risale al 1639, grazie all'osservazione del transito di Venere davanti al Sole. Le misure successive realizzate durante i transiti de 1761, 1769, 1874 e 1882 hanno consentito di migliorare notevolmente la stima delle dimensioni assolute delle orbite di tutti i pianeti. Il problema che segue è basato sui dati di un transito osservato in tempi più recenti.

La figura qui sopra mostra il transito di Venere davanti al disco solare osservato il 6 giugno 2012. La linea bianca tratteggiata indica il transito osservato da Honolulu, isole Hawaii, φ = 21.31° N, dove il fenomeno ha avuto inizio alle 22:09:00 UTC e si è concluso alle 04:19:00 UTC. La linea blu tratteggiata indica il transito osservato da Anchorage, Alaska, φ = 61.22° N, dove il fenomeno ha avuto inizio alle 21:34:00 UTC e si è concluso alle 04:44:00 UTC. A causa della diversa latitudine dei luoghi di osservazione Venere

segue una traiettoria diversa sul disco del Sole nei due casi, inoltre il transito inizia e finisce in momenti diversi.
Mettersi nei panni di un astronomo del XVIII secolo, che non conosceva le distanze Terra-Sole e Venere-Sole riportate nella tabella dei dati, e ricavare la distanza Terra-Sole, ovvero il valore dell'unità astronomica, dai dati del transito del 6 giugno 2012 osservato da Honolulu e Anchorage, assumendo che:

- visto dalla Terra il Sole abbia un diametro angolare medio: $\Phi \cong 0°.5320$;
- la velocità angolare media di Venere sul disco del Sole durante il transito sia $\omega = 4.280 \cdot 10^{-4}$ °/minuto;
- le orbite di Venere e della Terra siano circolari;
- la differenza in longitudine fra Honolulu e Anchorage sia trascurabile;
- sia possibile trascurare il raggio del Sole e della Terra nel calcolo della distanza.

Soluzione:

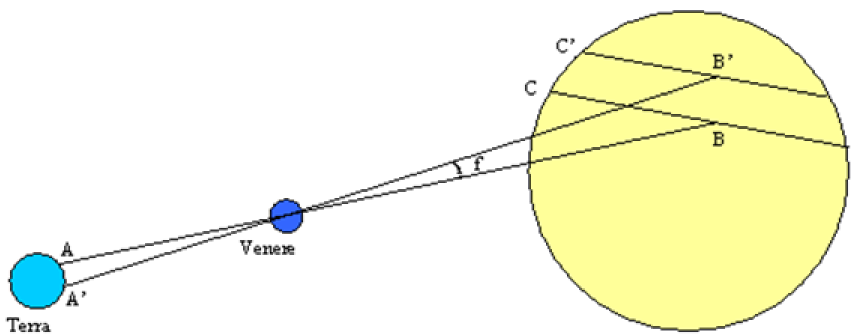
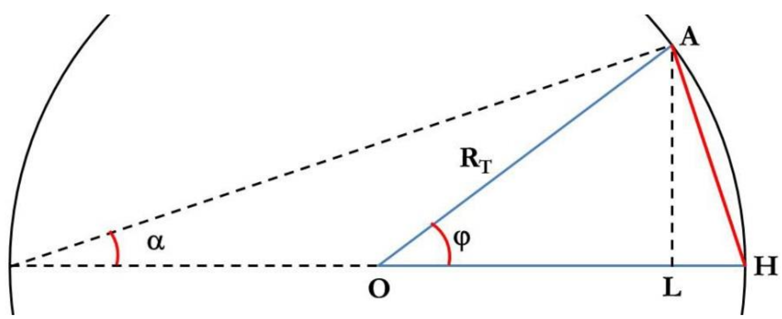


Fig. 1

Un osservatore posto in A (Anchorage) vedrà il pianeta Venere percorrere sul disco solare la corda C, mentre un osservatore posto in A' (Honolulu) lo vedrà transitare sulla corda C'. Quindi in un generico istante, Venere apparirà in due punti diversi, rispettivamente B e B', sulla fotosfera del Sole.

La separazione angolare tra B e B' (angolo f) può essere ottenuta dalla differenza della durata del transito nei due luoghi di osservazione.



Possiamo calcolare la distanza lineare tra Anchorage (A) e Honolulu (H) la cui differenza di latitudine è:

$$\varphi = \varphi_A - \varphi_H = (61°.22 - 21°.31) = 39°.91$$

con il teorema di Pitagora o con il teorema della corda

Teorema di Pitagora: $AL = R_T \sin\varphi \cong 4092$ km $\qquad LH = R_T - OL = R_T - R_T\cos\varphi \cong 1486$ km

$$AH = \sqrt{AL^2 + LH^2} \cong 4353 \text{ km}$$

Teorema della corda: $AH = 2\,R_T \sin\alpha = 2\,R_T \sin\left(\frac{180-(180-\varphi)}{2}\right) = 2\,R_T \sin 19°.955 \cong 4353$ km

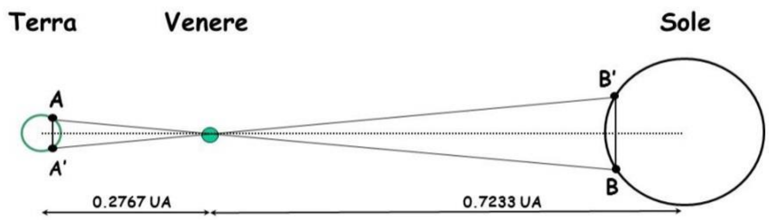
Nel XVIII secolo il rapporto tra la distanza Sole-Venere (SV) e la distanza Sole-Terra (ST) poteva essere calcolato, detti P_V e P_T i periodi orbitali di Venere e Terra, dalla III legge di Keplero:

$$\frac{SV}{ST} = \sqrt[3]{\frac{P_V^2}{P_V^2}} = \sqrt[3]{\frac{224.70^{\,2}}{365.26^{\,2}}} \cong 0.7233 \qquad \text{da cui ricaviamo} \qquad SV \cong 0.7233\ ST$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto misurando l'angolo Venere-Terra-Sole a una massima elongazione di Venere.

Durante un transito Sole, Venere e Terra si trovano quasi sullo stesso piano e allineati, quindi la distanza Venere-Terra (VT) è data, con ottima approssimazione, dalla relazione:

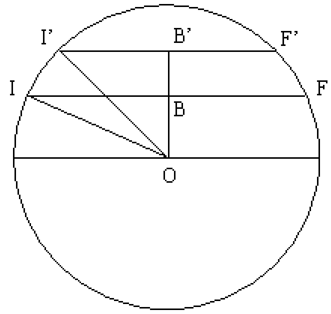
$$VT = ST - SV \cong ST - 0.7233\ ST \cong 0.2767\ ST$$



I triangoli A-Venere-A' e B-Venere-B' sono simili (disegno non in scala), poiché isosceli e con angoli opposti al vertice. Quindi la lunghezza (in km) del segmento BB' (trascurando le dimensioni del Sole e della Terra) è data da:

$$BB' = AA' \frac{SV}{VT} \cong$$
$$4353 \cdot 2.614 \cong 11380 \text{ km}$$

Calcoliamo adesso le dimensioni angolari del segmento BB', osservato dalla Terra.



Nella figura a lato è rappresentato il disco solare con i due percorsi del transito: I'F' (inizio e fine) e IF, osservati, rispettivamente, dalle due postazioni A' (Honolulu) e A (Anchorage).
Le dimensioni angolari dei segmenti I'F' e IF possono essere calcolate moltiplicando la velocità angolare di Venere ($\omega = 4.280 \cdot 10^{-4}$ °/minuto) per la durata del transito (t' = 6h 10m = 370 minuti e t = 7h 10 m = 430 minuti) osservato rispettivamente da A' e A.

$$I'F' = \omega \cdot t' = 4.280 \cdot 10^{-4} \frac{°}{\text{minuto}} \cdot 370.0 \text{ minuti} \cong 0.1584°$$

$$IF = \omega \cdot t = 4.280 \cdot 10^{-4} \frac{°}{\text{minuto}} \cdot 430.0 \text{ mimuti} \cong 0.1840°$$

Il Sole ha un diametro apparente Φ = 0°.5320, quindi il suo raggio apparente è $R_A \cong 0°.2660$. Dal teorema di Pitagora possiamo calcolare i segmenti angolari B'O e BO e infine la misura angolare θ del segmento B'B precedentemente ricavato:

$$B'O = \sqrt{R_A{}^2 - \left(\frac{I'F'}{2}\right)^2} \cong 0.2539 \qquad BO = \sqrt{R_A{}^2 - \left(\frac{IF}{2}\right)^2} \cong 0°.2496 \qquad \theta = B'O - BO \cong 0°.0043$$

Sappiamo ora che alla distanza ST, un angolo $\theta \cong 0°.0043$ corrisponde a un segmento lineare $BB' \cong 11380$ km e possiamo ricavare il valore della distanza Sole Terra (ST):

$$ST = \frac{BB'}{\tan\theta} = \frac{11380}{\tan 0°.0043} \cong 151.6 \cdot 10^6 \text{ km} = 1 \text{ UA}$$

Il valore dell'unità astronomica così ricavato differisce di poco più dell'1% rispetto a quello attualmente accettato di $149.6 \cdot 10^6$ km: un eccellente risultato considerando le approssimazioni usate.

Nota: questa soluzione è una semplificazione di un problema astronomico molto complesso (si veda anche il problema 5 della categoria Junior 2). La giuria ha tenuto conto nelle valutazioni anche di altri procedimenti proposti dagli studenti.