OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2018

Finale Nazionale – 19 aprile

Prova Teorica categoria Senior

1. La rotazione di Venere

Il periodo di rotazione di Venere è 2/3 di quello di rivoluzione della Terra, il che comporta che a ogni congiunzione inferiore Venere rivolge alla Terra sempre la stessa faccia. Calcola il periodo di rotazione di Venere e l'intervallo di tempo tra due congiunzioni inferiori consecutive di Venere con la Terra e tra una congiunzione inferiore e la successiva congiunzione superiore.

Soluzione.

Detto "T_{Vrot}" il periodo di rotazione di Venere e "T" il periodo di rivoluzione della Terra, si ha:

$$\frac{T_{V\,rot}}{T} = \frac{2}{3} \qquad \text{e quindi:} \quad T_{V\,rot} = \frac{2}{3} \cdot T = \frac{2}{3} \cdot 365.25\ giorni \cong\ 243.5 \text{ giorni}$$

Due congiunzioni consecutive si verificano dopo ogni periodo sinodico. Detto "S" il periodo sinodico di Venere e "V" il periodo di rivoluzione di Venere si ha:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{V} - \frac{1}{T} = \frac{1}{224.70\ giorni} - \frac{1}{365.25\ giorni} = 0.0044504 \frac{1}{giorni} - 0.0027378 \frac{1}{giorni} = 0.0017126\ \frac{1}{giorni}$$

da cui S = 583.91 giorni.

Tra una congiunzione inferiore e la successiva congiunzione superiore trascorre un tempo (T_1) pari a metà del periodo sinodico: $T_1 = \frac{S}{2} \cong 291.96$ giorni.

2. Il raggio di un pianeta nano

Determina il raggio di un pianeta nano in orbita a una distanza costante D = 67 UA dal Sole, che appare di magnitudine visuale $m_P = 19$ visto dal Sole. L'albedo del pianeta vale $A = 0.81$. Non conoscendo l'albedo, puoi comunque ottenere una stima del raggio del pianeta?

Soluzione.

La magnitudine apparente visuale del Sole vista dal pianeta ($m_{\odot V}$) è data dalla relazione: $m_{\odot V} = M_V - 5 + 5 \log d$, ed essendo D = 67 UA = $3.25 \cdot 10^{-4}$ pc, ricaviamo:

$$m_{\odot V} = 4.83 - 5 + 5 \log\ (3.25\ \cdot\ 10^{-4}) \cong\ -17.61$$

La luminosità del pianeta è dovuta alla riflessione del flusso di energia che riceve dal Sole. Detta $L_\odot$ la quantità totale di energia emessa dal Sole ogni secondo alla distanza del pianeta la quantità di energia solare al secondo per unità di superfice è data da: $L_{\odot P} = \frac{L_\odot}{4\,\pi\,D^2}$

La superfice equivalente del pianeta che riceve la radiazione solare vale: $S_P = \pi\, R_P^2$, quindi la quantità totale di energia riflessa ogni secondo dal pianeta vale: $E_P = L_{\odot P} \cdot S_P \cdot A$

Alla distanza del Sole (trascurando il raggio del Sole rispetto alla distanza del pianeta) la quantità di energia al secondo per unità di superfice che si riceve dal pianeta è data da:

$$L_P = \frac{E_P}{2\,\pi\,D^2} = \frac{L_{\odot P} \cdot S_P \cdot A}{2\,\pi\,D^2} = \frac{L_\odot\ \cdot\ \pi\,R_P^2\ \cdot A}{4\,\pi\,D^2\ \cdot\ 2\,\pi\,D^2} = \frac{L_\odot\ \cdot\ R_P^2\ \cdot A}{8\,\pi\,D^4}$$

La differenza di magnitudine apparente tra il Sole visto dal pianeta e il pianeta visto dal Sole (m_P) sarà quindi:

$$m_{\odot V} - m_P = -2.5 \log \frac{L_{\odot P}}{L_P} = -2.5 \log \left(\frac{L_\odot}{4\,\pi\,D^2} \cdot \frac{8\,\pi\,D^4}{L_\odot\ \cdot\ R_P^2\ \cdot A} \right) = -2.5 \log \left(\frac{2\,D^2}{R_P^2\ \cdot A} \right)$$

Risolvendo rispetto a R_P si ottiene la relazione finale:

$$R_P = \frac{\sqrt{2}\,D}{\sqrt{A\ \cdot\ 10^{\left(\frac{m_P - m_{\odot V}}{2.5}\right)}}} = \frac{1417\ \cdot 10^{10}}{\sqrt{0.81\ \cdot\ 10^{14.64}}} \cong \frac{1.417\ \cdot 10^{10}}{188\ \cdot\ 10^5} \cong 754\ km$$

Se l'albedo non è nota, poiché deve comunque essere A ≤ 1 possiamo ottenere, ponendo nella precedente relazione A = 1 il valore minimo del raggio del pianeta. Sarà quindi:

$$R_P \geq \frac{\sqrt{2}\ D}{\sqrt{A\ \cdot\ 10^{\left(\frac{m_p - m_{\odot}}{2.5}\right)}}} \geq \frac{1.417\ \cdot 10^{10}}{\sqrt{10^{14.64}}} \geq \frac{1.417\ \cdot 10^{10}}{209\ \cdot\ 10^5} \geq 678\ km$$

3. Il satellite Hipparcos II

Negli anni '90 il satellite Hipparcos, in orbita intorno alla Terra, ha misurato con il metodo delle parallassi la distanza di circa 126000 stelle fino a una distanza limite di 200 pc. Tra queste ricordiamo α Centauri, la cui parallasse è $\pi_{\alpha Cen}$ = 0".75, e la Stella di Barnard, la cui parallasse è $\pi_{Barnard}$ = 0".55. Ora si sta progettando il nuovo satellite Hipparcos II, con le stesse caratteristiche tecniche, da mandare però in orbita intorno al pianeta Saturno.

Calcola nel caso di Hipparcos II:
a) le parallassi che verranno misurate per α Centauri e per la Stella di Barnard;
b) la nuova distanza limite in pc per cui si avrà la stessa accuratezza delle misure effettuate dal satellite Hipparcos;
c) il numero di stelle misurabili, considerando una densità stellare omogenea;
d) dopo quanto tempo avremo le prime misure con la massima precisione ottenibile;
e) quanto vale un pc saturniano rispetto a quello terrestre in UA.

Trascura la distanza satellite-Saturno e considera orbite circolari.

Soluzione.

a) Dalla definizione di parsec la distanza di una stella in parsec (Dpc), nota la sua parallasse (π) in secondi d'arco, è data da: $Dpc = \frac{206265 \cdot a}{\pi}$ con "a" distanza Terra-Sole misurata in parsec, essendo per definizione 206265 · a = 1 parsec. Effettuando una misura dall'orbita di Saturno utilizziamo una "base" (trascurando la distanza satellite-Saturno) che è più grande della "base" dell'orbita terrestre di un fattore pari al rapporto tra i semiassi maggiori delle due orbite. Per trovare le nuove parallassi basta quindi moltiplicare il valore delle parallassi misurate dall'orbita della Terra per il rapporto:

$$k = \frac{semiasse\ orbita\ di\ Saturno}{semiasse\ orbita\ della\ Terra} = \frac{1.427 \cdot 10^9 km}{149.6 \cdot 10^6 km} \cong 9.539$$

Per α Cen misureremo quindi una parallasse $\pi_{\alpha Cen}$ = 0".75 · 9.539 = 7".15 e per la stella di Barnard una parallasse $\pi_{Barnard}$ = 0".55 · 9.539 = 5".25

b) Se con Hipparcos si è arrivati a misurare distanze fino a $D_H = 200\ pc$, vuol dire che l'angolo più piccolo misurabile dal satellite era di circa $\pi = \frac{1}{200} = 0''.005$. Nel caso di Hipparcos II questo limite equivale a una distanza: $D_{HII} = \frac{k}{\pi} = \frac{9.539}{0''.005} \cong 1908\ pc$

c) Il volume di una sfera di raggio 200 pc è di: $V_{200} = \frac{4}{3}\pi R^3 \cong 335\ \cdot\ 10^5\ pc^3$, per cui detto N_{200} il numero di stelle misurabili entro una distanza di 200 pc, la densità stellare ricavabile (Ds) è:

$$D_s = \frac{N_{200}}{V_{200}} \cong \frac{126000\ stelle}{335\ \cdot\ 10^5\ pc^3} \cong 3.76\ \cdot\ 10^{-3}\ \frac{stelle}{pc^3}$$

Il volume di una sfera di raggio 1908 pc è di: $V_{1908} = \frac{4}{3}\pi R^3 \cong 2.91\ \cdot\ 10^{10}\ pc^3 \cong 869\ \cdot V_{200}$
Assumendo una densità stellare uniforme il numero di stelle misurabili (N_{1908}) sarà:

$$N_{1908} = D_s\ \cdot V_{1908} = D_s \cdot 869 \cdot V_{200} = N_{200} \cdot 869 = 109.4 \cdot 10^6\ stelle$$

(Nota: poiché osservando a oltre 1000 pc dal Sole si osserverebbero regioni fuori dal piano della Galassia, non è del tutto corretto assumere una densità stellare uniforme, come è possibile fare entro una distanza di circa 200 pc);

d) La massima precisione si ottiene sfruttando la massima estensione possibile della "base", bisognerà quindi aspettare almeno metà del periodo orbitale di Saturno, cioè circa 14.72 anni;

e) Dalla risposta a) si deduce che il parsec saturniano (pc_S) è 9.539 volte quello terrestre, ovvero:

$$pc_S = 9.539\ \cdot 30857\ \cdot\ 10^9\ km \cong 2.943\ \cdot\ 10^{14}\ km\ \cong 1.97\ \cdot\ 10^6\ UA$$

4. La radiazione di Hawking.

In un articolo apparso nel 1974 sulla rivista "Nature", Stephen Hawking ipotizzò l'esistenza di un processo di emissione di energia da parte dei buchi neri (black holes), in seguito chiamato "radiazione di Hawking", che porta alla loro "evaporazione". In termini estremamente semplificati, il meccanismo che genera la radiazione deriva dalla creazione, da fluttuazioni quantistiche del vuoto nelle immediate vicinanze dell'orizzonte degli eventi del buco nero, di coppie particella-antiparticella. Se la coppia particella-antiparticella si annichila avremo un bilancio energetico nullo, se invece una delle due particelle entra nell'orizzonte degli eventi mentre l'altra riesce a sfuggire, il risultato sarà la comparsa di una energia "positiva" all'esterno del buco nero, che deve essere bilanciata da una energia "negativa" all'interno del buco nero, ovvero da una diminuzione di massa del buco nero.

Considera un buco nero avente una massa pari a 100 volte quella della Terra e calcola il raggio dell'orizzonte degli eventi. Considera quindi un guscio sferico che si estende per 10 cm oltre tale orizzonte, all'interno del quale il meccanismo di Hawking è in funzione. In ogni cm^3 di questo guscio sferico vengono generate $136.6 \cdot 10^4$ coppie elettrone-positrone ogni secondo, che non fanno in tempo ad annichilarsi e vengono separate dalla gravità del buco nero. Supponendo il fenomeno costante, calcola dopo quanto tempo, in anni, si avrà la completa evaporazione del buco nero e confronta il valore trovato con l'età attuale dell'Universo.

Soluzione.

Il raggio dell'orizzonte degli eventi di un buco nero (R_{BH}), detto raggio di Schwarzschild, è dato dalla relazione:

$$R_{BH} = \frac{2GM}{c^2}$$

che nel caso di un buco nero di massa pari a 100 volte la massa della Terra vale:

$$R_{BH} = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 100 \cdot 5.97 \cdot 10^{24}\ kg}{\left(299792 \cdot 10^3 \dfrac{m}{s}\right)^2} \cong 0.887\ m = 88.7\ cm$$

Il guscio sferico in cui il meccanismo di Hawking è in funzione si estende quindi da R_{BH} a $R_{BH} + 10\ cm$ e ha un volume pari a:

$$V_{guscio} = \frac{4}{3}\pi\left[(R_{BH}+10)^3 - {R_{BH}}^3\right] = \frac{4}{3}\pi\left(98.7^3\ cm^3 - 88.7^3\ cm^3\right) \cong 1.10 \cdot 10^6\ cm^3$$

Il numero di coppie elettrone-positrone che si creano ogni secondo nel guscio, e che producono la radiazione di Hawking, è dato da:

$$N = 136.6\ \cdot 10^4 \frac{coppie}{s \cdot cm^3} \cdot V_{guscio} = 136.6\ \cdot 10^4 \frac{coppie}{s \cdot cm^3} \cdot 1.10 \cdot 10^6\ cm^3 = 1.50 \cdot 10^{12}\ \frac{coppie}{s}$$

Poiché nel guscio tutte le coppie elettrone-positrone contribuiscono alla radiazione di Hawking, perché nessuna coppia fa in tempo ad annichilirsi prima che una cada oltre l'orizzonte degli eventi, ogni secondo il buco nero perde una quantità di massa (ΔM_{BH}) pari alla massa di $1.50 \cdot 10^{12}$ elettroni:

$$\Delta M_{BH} = N \cdot m_e = 1.50 \cdot 10^{12}\ \frac{elettroni}{s} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} kg \cong 1.37 \cdot 10^{-18}\ \frac{kg}{s}$$

Dato che il buco nero ha una massa pari a 100 masse terrestri, esso evaporerà completamente in un tempo:

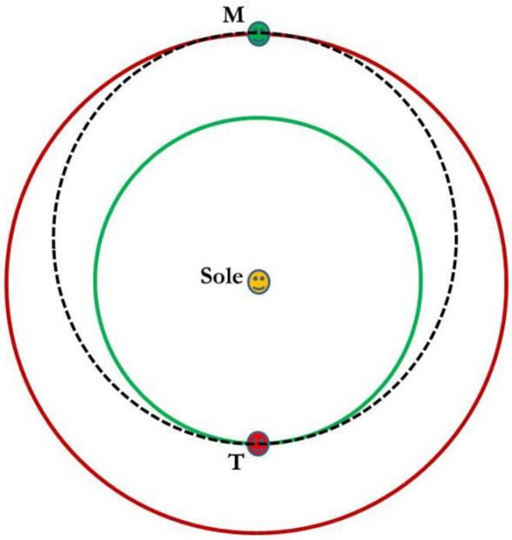
$$t_{evaporazione} = \frac{M_{BH}}{\Delta M_{BH}} = \frac{100\ M_{Terra}}{\Delta M_{BH}} = \frac{100 \cdot 5.97 \cdot 10^{24}\ kg}{1.37 \cdot 10^{-18}\ kg \cdot s^{-1}} \cong 4.36 \cdot 10^{44}\ s\ \cong\ 1.38 \cdot 10^{37}\ anni$$

L'età attuale dell'Universo è stimata in 13.8 miliardi di anni, equivalenti a circa $4.36 \cdot 10^{17}$ secondi. Il rapporto (K) tra il tempo di evaporazione del buco nero e l'età dell'Universo è quindi:

$$K = \frac{t_{evaporazione}}{età\ dell'Universo} = \frac{4.36 \cdot 10^{44} s}{4.36 \cdot 10^{17} s} = 10^{27}$$

Quindi a causa della radiazione di Hawking un buco nero con massa pari a 100 volte la massa della Terra evaporerà completamente dopo un tempo 10^{27} volte l'età attuale dell'Universo.

5. Missione su Marte



Come abbiamo visto in uno dei problemi della Gara Interregionale, Pippo è in partenza per il pianeta Marte. Tuttavia la TASA (TopoliniA Space Agency) non ha molti soldi a disposizione e deve utilizzare un razzo vettore quanto più a buon mercato possibile. Uno dei modi più "economici" per inviare una navicella dalla Terra a Marte è quello di utilizzare una "Orbita di trasferimento di Hohmann" (dal nome dell'ingegnere tedesco Wolfgang Hohmann che per primo propose questa traiettoria nel 1925). La navicella viene inserita su un'orbita ellittica (curva tratteggiata nella figura) che ha il perielio sull'orbita della Terra e l'afelio sull'orbita di Marte. Se la navicella viene lanciata quando la Terra si trova nel punto "T", raggiungerà Marte quando questi si troverà nel punto "M". Una volta che le è stata impressa la corretta velocità iniziale la navicella proseguirà senza ulteriore propulsione, sfruttando la sola forza di gravità del Sole.

Calcola:
1) il tempo impiegato dalla navicella per raggiungere Marte partendo da "T";
2) l'eccentricità dell'orbita seguita dalla navicella;
3) la velocità, in aggiunta a quella orbitale alla Terra, che deve essere impressa alla navicella per inserirla nell'orbita di trasferimento;
4) la velocità che avrà la navicella quando incontrerà Marte nel punto "M";
5) la variazione di velocità che Pippo dovrà imprimere alla navicella per inserirla sull'orbita di Marte: dovrà frenare o accelerare e di quanto?
6) detta "M_1" la posizione di Marte al momento del lancio, il valore dell'angolo $M\,\hat{S}\,M_1$ formato dalle congiungenti il Sole con le due posizioni di Marte; identifica con un disegno il punto "M_1" sull'orbita;
7) detta "T_1" la posizione della Terra al momento dell'arrivo della navicella su Marte, il valore dell'angolo $M\,\hat{S}\,T_1$ formato dalle congiungenti il Sole con le posizioni di Marte e della Terra; identifica con un disegno il punto "T_1" sull'orbita.

Per la soluzione considera per la Terra e Marte orbite circolari giacenti sullo stesso piano e trascura gli effetti gravitazionali della Terra e di Marte, considerando quindi la sola forza di gravità del Sole.

Soluzione.

1. L'orbita tratteggiata è un'ellisse che ha semiasse maggiore (a) pari alla metà somma della distanza della Terra (a_T) e di Marte (a_M) dal Sole che in UA vale:

$$a = \frac{a_T + a_M}{2} = \frac{1 + 1.523}{2} \cong 1.262\ UA$$

Quindi il tempo impiegato (t) per raggiungere Marte è semplicemente la metà del periodo orbitale di un corpo che si muove intorno al Sole lungo un'orbita con il semiasse maggiore calcolato:

$$t = \frac{\sqrt[2]{a^3}}{2} \cong \frac{\sqrt[2]{2.01}}{2} \cong 0.7089\ anni \cong 259\ giorni$$

2. Il semiasse maggiore dell'orbita vale a = 1.262 UA, mentre la distanza all'afelio e: D_a= 1.523 UA. Dalla relazione: $D_a = a\,(1+e)$, possiamo ricavare l'eccentricità dell'orbita:

$$e = \frac{D_a}{a} - 1 = 0.2068$$

3. La velocità che deve essere impressa alla navicella è quella che compete al perielio a un corpo con orbita intorno al Sole avente semiasse maggiore ed eccentricità calcolate. La velocità può essere calcolata dal principio di conservazione dell'energia meccanica e dalla seconda legge di Keplero. L'energia meccanica totale della navicella è data da:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M_\odot m}{d}$$

dove "m" è la massa della navicella, "v" la sua velocità di rivoluzione, "d" la sua distanza al Sole e "$M_\odot$" la massa del Sole. L'energia meccanica totale si conserva e, in particolare, il suo valore all'afelio è uguale al suo valore al perielio. Indicando con i pedici "a" e "p" i valori all'afelio e al perielio, avremo:

$$\frac{1}{2} m {v_a}^2 - G \frac{M_\odot m}{d_a} = \frac{1}{2} m {v_p}^2 - G \frac{M_\odot m}{d_p}$$

ricordando che: $d_a = a(1+e)$ e $d_p = a(1-e)$ e semplificando "m" otteniamo infine:

$$\frac{1}{2}{v_a}^2 - \frac{GM_\odot}{a(1+e)} = \frac{1}{2}{v_p}^2 - \frac{GM_\odot}{a(1-e)}$$

Inoltre, dalla II Legge di Keplero sappiamo che vale la relazione: $v_a a\,(1+e) = v_p a\,(1-e)$
Con pochi semplici passaggi matematici si ricava, in definitiva:

$$v_p = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} \qquad v_a = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}$$

La velocità iniziale vale quindi:

$$v_i = v_p = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} = \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 1.99 \cdot 10^{30}\,kg \cdot 1.521}{188.8 \cdot 10^9\,m}} \cong 32.7 \cdot 10^3\frac{m}{s} = 32.7\,\frac{km}{s}$$

La velocità orbitale della Terra intorno al Sole (V_{Terra}), nell'ipotesi di orbita circolare con semiasse "a_{Terra}", vale:

$$V_{Terra} = \frac{2\,\pi\,a_{Terra}}{T_{Terra}} = \frac{9.400 \cdot 10^8\,km}{315.58 \cdot 10^5\,s} \cong 29.8\,\frac{km}{s}$$

sarà quindi possibile, lanciando opportunamente la navicella, raggiungere la velocità necessaria per inserirla nell'orbita di trasferimento imprimendogli una velocità aggiuntiva (ΔV_i):

$$\Delta V_i = v_i - V_{Terra} \cong 32.7\,\frac{km}{s} - 29.8\frac{km}{s} \cong 2.9\,\frac{km}{s}$$

4. La velocità finale della navicella è quella che compete all'afelio a un corpo in orbita intorno al Sole con semiasse maggiore ed eccentricità calcolate:

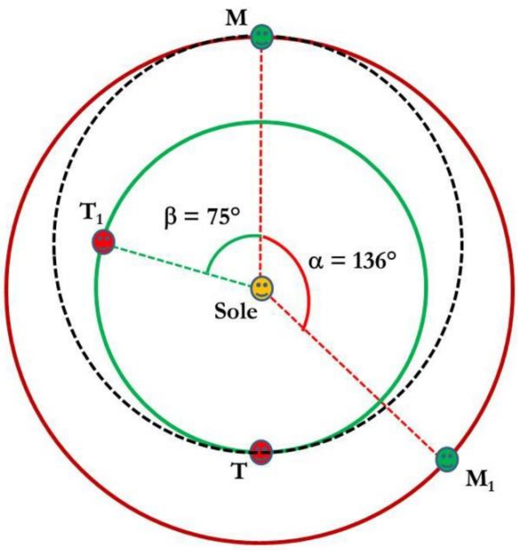
$$v_f = v_a = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} = \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 1.99 \cdot 10^{30}\,kg \cdot 0.6573}{188.8 \cdot 10^9\,m}} \cong 21.5 \cdot 10^3\frac{m}{s} = 21.5\,\frac{km}{s}$$

5. Marte impiega 686.97 giorni per completare un'orbita intorno al Sole, quindi, detto "a_{Marte}" il semiasse maggiore dell'orbita che viene assunta circolare, la sua velocità tangenziale è costante ed è data da:

$$V_{Marte} = \frac{2\,\pi\,a_{Marte}}{T_{Marte}} = \frac{14.32 \cdot 10^8\,km}{593.54 \cdot 10^5\,s} \cong 24.1\,\frac{km}{s}$$

La navicella arriverà quindi in prossimità di Marte con una velocità inferiore a quella del pianeta lungo la sua orbita e, trascurando l'attrazione gravitazionale di Marte, per essere inserita in orbita attorno al pianeta la sua velocità dovrà essere incrementata di:

$$\Delta v_f = V_{Marte} - v_f \cong 24.1\,\frac{km}{s} - 21.5\,\frac{km}{s} \cong 2.6\,\frac{km}{s}$$



6. Poiché Marte impiega 686.97 giorni per completare un'orbita intorno al Sole, in 259 giorni descrive un angolo (α) che si può ricavare con la proporzione: $686.97 : 360° = 259 : \alpha$

da cui ricaviamo:

$$\alpha = M\,\hat{S}\,M_1 = \frac{259g \cdot 360°}{686.97g} \cong 136°$$

7. Poiché la Terra impiega 365.26 giorni per completare un'orbita intorno al Sole, in 259 giorni descrive un angolo (γ) che si può ricavare con la proporzione: $365.26 : 360° = 259 : \gamma$
da cui ricaviamo:

$$\gamma = \frac{259g \cdot 360°}{365.26g} \cong 255°$$

La Terra avrà quindi "superato" Marte e l'angolo cercato sarà:

$$M\,\hat{S}\,T_1 = \beta = \gamma - 180° = 75°$$