OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2018

Finale Nazionale – 19 aprile

Prova Teorica categoria Junior 2

1. Un doppio transito planetario

Il satellite artificiale Urania II in orbita attorno a Urano fotografa un fenomeno particolare: il transito contemporaneo, ma ben distinto, dei pianeti Giove e Saturno davanti al Sole. Quale dei due pianeti appare più grande visto da Urano? Calcola la percentuale dell'area del Sole vista da Urano coperta dai due pianeti durante il transito. Assumi orbite circolari, trascurando l'inclinazione del piano orbitale dei pianeti rispetto all'eclittica e la distanza di Urania II da Urano.

Soluzione.

Dette "d" la distanza e "R" il raggio, le dimensioni angolari del Sole ($D_\odot$), di Giove (D_G) e di Saturno (D_S) visti da Urano si calcolano con la relazione:

$$D = 2\ \sin^{-1}\frac{R}{d}$$

Poiché stiamo osservando dei transiti, la distanza Urano-Giove (d_{UG}) e Urano-Saturno (d_{US}) è data da:

$d_{UG} = 2.871 \cdot 10^9$ km - $778.4 \cdot 10^6$ km $\cong 2.093 \cdot 10^9$ km $d_{US} = 2.871 \cdot 10^9$ km - $1.427 \cdot 10^9$ km $\cong 1.444 \cdot 10^9$ km

Per le dimensioni angolari avremo quindi:

$$D_\odot = 2\ \sin^{-1}\frac{695475\ km}{2.871 \cdot 10^9\ km} \cong 1'.67 \qquad D_G = 2\ \sin^{-1}\frac{71493\ km}{2.093 \cdot 10^9\ km} \cong 0'.235 \qquad D_S = 2\ \sin^{-1}\frac{60267\ km}{1.444 \cdot 10^9\ km} \cong 0'.287$$

Osservato da Urano il pianeta che appare più grande è Saturno.

La superficie dei tre corpi vista da Urano ($A_\odot$, A_G e A_S) e data dalla relazione: $A = \pi\, R^2 = \frac{\pi\, D^2}{4}$ e vale:

$A_\odot \cong 2.19$ primi quadrati, $A_G \cong 0.043$ primi quadrati, $A_S \cong 0.065$ primi quadrati

Detta $Ac_\odot$ la percentuale di area del Sole coperta dai due pianeti avremo:

$A_G + A_s \cong 0.108$ primi quadrati e infine $Ac_\odot = 100\ \frac{A_G + A_s}{A_\odot} \cong 5\ \%$

2. Osservate la base lunare Alpha

È possibile a occhio nudo distinguere dalla Terra la base lunare Alpha che sulla superficie della Luna copre un'area di forma quadrata con lato di 50 km? È possibile distinguerla osservandola visualmente con un telescopio di apertura 50 cm? Considera per il diametro della pupilla un valore di 3 mm e per la lunghezza d'onda delle osservazioni visuali $\lambda = 5500$ Å. Trascura l'eccentricità dell'orbita lunare.

Soluzione.

Calcoliamo il potere risolutivo (β) della pupilla, dalla relazione di Rayleigh si ottiene:

$$\beta = 1.22\ \frac{\lambda}{D} = 1.22\ \frac{5500\ \cdot\ 10^{-10}\ m}{0.003\ m} \cong 2.24\ \cdot\ 10^{-4}\ radianti\ \cong 46"$$

L'occhio umano senza l'aiuto di strumenti ha un potere risolutivo corrispondente a circa 46". Ciò significa che è in grado di distinguere solo oggetti con dimensioni angolari maggiori del suo potere risolutivo.

Dette "d" le dimensioni lineari della base Alpha e "h" la sua distanza, trasformando le dimensioni lineari della base in dimensioni angolari (α), si ottiene:

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{d}{h} = \tan^{-1}\frac{50\ km}{384.4\ \cdot\ 10^3\ km} = 7.45\ \cdot\ 10^{-3}\ gradi \cong\ 0'.447\ \cong 26".8$$

Quindi poiché $\alpha < \beta$ non si può distinguere dalla Terra la base lunare a occhio nudo (neppure considerando la diagonale del quadrato, che risulta $\cong 38"$)

Calcoliamo adesso il potere risolutivo (γ) di un telescopio con apertura di 50 cm:

$$\gamma = 1.22\ \frac{\lambda}{D} = 1.22\ \frac{5500\ \cdot\ 10^{-10}\ m}{0.50\ m} \cong 1.34\ \cdot\ 10^{-6}\ radianti\ \cong\ 0".28$$

Quindi poiché $\alpha > \gamma$ con il telescopio è possibile osservare facilmente dalla Terra la base lunare.

Tuttavia dobbiamo tener presente che l'atmosfera della Terra disturba le osservazioni astronomiche e che, a causa degli effetti della turbolenza (seeing), il potere risolutivo "reale" di un telescopio risulta inferiore a quello teorico. In generale si può assumere come valore medio della turbolenza $t \approx 1''$. Quindi il potere risolutivo "reale" di un telescopio da 50 cm sarà: $\gamma_{reale} \approx 1''$. Notiamo tuttavia che anche in queste condizioni risulta ancora $\alpha > \gamma_{reale}$ per cui sarà comunque possibile distinguere dalla Terra la base lunare.

3. I Soli di Tatooine

Nell'universo fantascientifico della saga di Guerre stellari, Tatooine è il pianeta natale della famiglia Skywalker ed è un pianeta desertico orbitante attorno a una stella binaria.
Supponiamo che ciascuno dei soli di Tatooine abbia una massa pari a quella del Sole e che le due stelle orbitino una intorno all'altra in un tempo pari a P = 24.5 giorni.

Supponiamo inoltre che Tatooine abbia un'orbita circolare stabile e ruoti intorno a entrambi i soli quasi sul loro stesso piano orbitale. Considerando la somma del flusso emesso dalle due stelle pari al doppio del flusso emesso dal Sole e il fatto che Tatooine sembra avere una temperatura simile a quella dei deserti della Terra, possiamo infine dedurre che il pianeta si trova a una distanza di circa $\sqrt{2}$ UA dal baricentro dei due soli. Da quello che possiamo evincere dalla serie di film, non sembrano esserci stagioni su Tatooine.

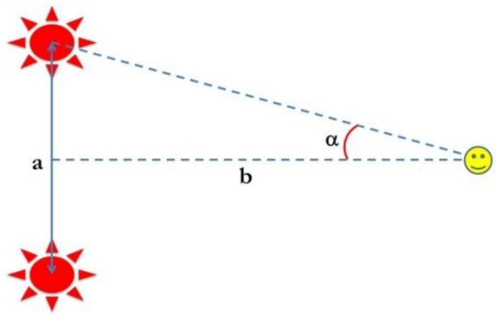
Calcola:
a) la distanza in UA tra i due soli;
b) la separazione angolare massima dei due soli, dal centro di uno al centro dell'altro, vista da Tatooine;
c) il periodo di rivoluzione di Tatooine intorno ai due soli;
d) l'inclinazione (approssimata) dell'asse del pianeta rispetto al piano orbitale dei due soli;
e) a che latitudine del pianeta il baricentro dei due soli passa per lo zenit.

Soluzione

a) Possiamo ricavare la distanza (a) tra i due soli di Tatooine dalla III Legge di Keplero:

$$a = \sqrt[3]{\frac{G\,(M_1 + M_2)\cdot P^2}{4\,\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.674\cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\cdot s^2}\cdot 3.98\cdot 10^{30}\,kg\cdot 4.48\cdot 10^{12}\,s^2}{39.48}}$$
$$\cong 3.11\cdot 10^{10}\,m \cong 31.1\cdot 10^6\,km \cong 0.208\,UA$$

b) La separazione angolare massima dei due soli (β) visti da Tatooine si avrà quando la retta congiungente il pianeta con il centro della retta congiungente le due stelle forma un angolo di 90°.



La configurazione è mostrata nella figura a sinistra (non in scala)
Assumendo "b" = $\sqrt{2}$ UA otteniamo:

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{a}{2\,b} = \tan^{-1}\frac{0.208\,UA}{2\cdot\sqrt{2}\,UA} \cong 4^\circ.20 \cong 252'$$

Quindi la separazione angolare massima delle due stelle viste dal pianeta sarà:

$$\beta = 2\,\alpha \cong 8^\circ.40 \cong 504'$$

c) Il periodo di rivoluzione di Tatooine (T), assumendo la sua massa trascurabile rispetto a quella delle due stelle, si calcola anch'esso con la III legge di Keplero e vale:

$$T = \sqrt{\frac{4\,\pi^2\,b^3}{G\,(M_1+M_2)}} = \sqrt{\frac{39.48\cdot 9.47\cdot 10^{33}\,m^3}{6.674\cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\cdot s^2}\cdot 3.98\cdot 10^{30}\,kg}} = 37.5\cdot 10^6\,s \cong 434\,giorni \cong$$
$$1.19\,anni\ terrestri$$

d) Poiché su Tatooine non ci sono stagioni, l'asse di rotazione del pianeta deve essere perpendicolare, o quasi perpendicolare, al piano dell'orbita;

e) Poiché il pianeta orbita quasi sullo stesso piano delle due stelle, l'obliquità dell'eclittica sarà prossima a zero e il baricentro delle due stelle avrà quindi declinazione $\delta \cong 0°$ nel corso dell'intero anno. Dalla relazione che esprime l'altezza massima al meridiano di un corpo con declinazione δ:

$$h_{max} = 90° - \varphi + \delta$$

ricaviamo che il baricentro dei due soli può raggiungere lo zenit ($h_{max} = 90°$) solo se $\varphi = 0°$ quindi solo all'equatore.

4. Il moto di una stella

Una stella ha magnitudine apparente m = 8.38 e magnitudine assoluta M = - 4.00. Della stella si conosce il moto proprio μ=0.0025"/yr (arcsec/anno). Assumendo nullo l'assorbimento interstellare, calcola la distanza della stella e la sua velocità tangenziale.

Soluzione.

La distanza "D" si ottiene dalla formula di Pogson: $M = m + 5 - 5\log d$ da cui ricaviamo la distanza in parsec:

$$D = 10^{\left(\frac{m-M+5}{5}\right)} \cong 10^{3.48} \cong 3000\,pc \cong 9.26 \cdot 10^{16}\,km$$

A questa distanza un angolo μ= 0.0025" corrisponde a una lunghezza lineare "d" data dalla relazione:

$$d = D\tan\mu \cong 1120 \cdot 10^{6}\,km$$

La velocità tangenziale della stella sarà quindi:

$$V_T = \frac{d}{t} \cong 1120 \cdot 10^{6}\,\frac{km}{anno} \cong 35.5\,\frac{km}{s}$$

5. Il satellite Hipparcos II

Negli anni '90 il satellite Hipparcos, in orbita intorno alla Terra, ha misurato con il metodo delle parallassi la distanza di circa 126000 stelle fino a una distanza limite di 200 pc. Tra queste ricordiamo α Centauri, la cui parallasse è $\pi_{\alpha Cen}$ = 0".75, e la Stella di Barnard, la cui parallasse è $\pi_{Barnard}$ = 0".55. Ora si sta progettando il nuovo satellite Hipparcos II, con le stesse caratteristiche tecniche, da mandare però in orbita intorno al pianeta Saturno.

Calcola nel caso di Hipparcos II:
a) le parallassi che verranno misurate per α Centauri e per la Stella di Barnard;
b) la nuova distanza limite in pc per cui si avrà la stessa accuratezza delle misure effettuate dal satellite Hipparcos;
c) il numero di stelle misurabili, considerando una densità stellare omogenea;
d) dopo quanto tempo avremo le prime misure con la massima precisione ottenibile;
e) quanto vale un pc saturniano rispetto a quello terrestre in UA.

Trascura la distanza satellite-Saturno e considera orbite circolari.

Soluzione.

a) Dalla definizione di parsec la distanza di una stella in parsec (Dpc), nota la sua parallasse (π) in secondi d'arco, è data da: $Dpc = \frac{206265 \cdot a}{\pi}$ con "a" distanza Terra-Sole misurata in parsec, essendo per definizione 206265 · a = 1 parsec. Effettuando una misura dall'orbita di Saturno utilizziamo una "base" (trascurando la distanza satellite-Saturno) che è più grande della "base" dell'orbita terrestre di un fattore pari al rapporto tra i semiassi maggiori delle due orbite. Per trovare le nuove parallassi basta quindi moltiplicare il valore delle parallassi misurate dall'orbita della Terra per il rapporto:

$$k = \frac{semiasse\ orbita\ di\ Saturno}{semiasse\ orbita\ della\ Terra} = \frac{1.427 \cdot 10^{9} km}{149.6 \cdot 10^{6} km} \cong 9.539$$

Per α Cen misureremo quindi una parallasse $\pi_{\alpha Cen}$ = 0".75 · 9.539 = 7".15 e per la stella di Barnard una parallasse $\pi_{Barnard}$ = 0".55 · 9.539 = 5".25

b) Se con Hipparcos si è arrivati a misurare distanze fino a $D_H = 200\,pc$, vuol dire che l'angolo più piccolo misurabile dal satellite era di circa $\pi = \frac{1}{200} = 0".005$. Nel caso di Hipparcos II questo limite equivale a una distanza: $D_{HII} = \frac{k}{\pi} = \frac{9.539}{0".005} \cong 1908\,pc$

c) Il volume di una sfera di raggio 200 pc è di: $V_{200} = \frac{4}{3}\pi R^3 \cong 335 \cdot 10^5\,pc^3$, per cui detto N_{200} il numero di stelle misurabili entro una distanza di 200 pc, la densità stellare ricavabile (Ds) è:

$$D_S = \frac{N_{200}}{V_{200}} \cong \frac{126000\, stelle}{335 \cdot 10^5\, pc^3} \cong 3.76 \cdot 10^{-3}\, \frac{stelle}{pc^3}.$$

Il volume di una sfera di raggio 1908 pc è di: $V_{1908} = \frac{4}{3}\pi R^3 \cong 2.91 \cdot 10^{10}\, pc^3 \cong 869 \cdot V_{200}$

Assumendo una densità stellare uniforme il numero di stelle misurabili (N_{1908}) sarà:

$$N_{1908} = D_s \cdot V_{1908} = D_s \cdot 869 \cdot V_{200} = N_{200} \cdot 869 = 109.4 \cdot 10^6\, stelle$$

(Nota: poiché osservando a oltre 1000 pc dal Sole si osserverebbero regioni fuori dal piano della Galassia, non è del tutto corretto assumere una densità stellare uniforme come è possibile fare entro una distanza di 200 pc);

d) La massima precisione si ottiene sfruttando la massima estensione possibile della "base", bisognerà quindi aspettare almeno metà del periodo orbitale di Saturno, cioè circa 14.72 anni;

e) Dalla risposta a) si deduce che il parsec saturniano (pc_S) è 9.539 volte quello terrestre, ovvero:

$$pc_S = 9.539 \cdot 30857 \cdot 10^9\, km \cong 2.943 \cdot 10^{14}\, km \cong 1.97 \cdot 10^6\, UA$$