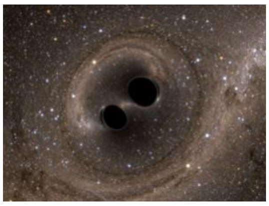
OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2016

Finale Nazionale - 20 Aprile

Categoria Senior
Prova Teorica

1. Le onde gravitazionali.



Il 2015 è stato un anno mirabile per la relatività generale. Il team internazionale LIGO/VIRGO ha infatti rivelato le onde gravitazionali prodotte da due buchi neri che si sono fusi circa 1.2 miliardi di anni fa. La scoperta, oltre a rappresentare una conferma fondamentale della teoria della relatività generale, ha permesso di calcolare che i due buchi neri che si sono fusi avevano masse di 29 e 36 volte la massa del Sole. Il buco nero che hanno formato ha invece 62 volte la massa del Sole. Calcolare:

1. la quantità totale di energia emessa utilizzando la relazione di Einstein $E = \Delta m\, c^2$
2. il raggio massimo del buco nero risultante dalla fusione.

Soluzione
Il valore Δm rappresenta la massa che si trasforma in energia: $\Delta m = (29M_\odot + 36M_\odot) - 62M_\odot = 3M_\odot$. La massa del buco nero risultante è quindi di $3M_\odot$ minore della somma della massa dei due buchi neri che si sono fusi. La quantità totale di energia emessa nello spazio sotto forma di onda gravitazionale vale quindi:

$E = 3 \cdot 1.99 \cdot 10^{30} \cdot 8.99 \cdot 10^{16} = 5.37 \cdot 10^{47}$ J.

La velocità di fuga dalla superfice di un corpo di massa M e raggio R (seconda velocità cosmica) vale:

$v = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}$; posto allora $v = c$ e $M = 62\ M_\odot$ possiamo ricavare il raggio massimo del buco nero:

$$R = \frac{2\,G\,M}{c^2} = \frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 62 \cdot 1.99 \cdot 10^{30}}{8.99 \cdot 10^{16}} = 183\ km$$

2. La gigante e la... lampadina.

Una gigante rossa si trova a una distanza d = 32.6 anni luce dal Sole, la temperatura della sua fotosfera è T = 2500 K e il suo raggio è pari a 100 volte quello del Sole.

1. Calcolare la luminosità totale della stella e la sua luminosità nella banda del visibile ($4000\ \text{Å} < \lambda < 7000\ \text{Å}$), sapendo che in tale banda irradia il 3.3% della sua energia totale.
2. Confrontare la luminosità della stella con quella di una lampadina da 100 W che irradia nel visibile il 5% della sua energia totale.
3. A quale distanza dovremmo porre la lampadina affinché ci appaia nel visibile luminosa come la stella?

Soluzione.
La luminosità totale della stella è data da:

$$L_{star} = 4\,\pi\,R^2\,\sigma\,T^4 = 4\,\pi\,(100\,R_\odot)^2\sigma\,T^4 = 4\,\pi\,(695475 \cdot 10^5)^2 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 2500^4 = 1.35 \cdot 10^{29}\,W$$

La luminosità della stella nella banda del visibile vale: $L_{Vstar} = L_{star}\,\frac{3.3}{100} = 4.46 \cdot 10^{27}\,W$

La luminosità della lampadina nella banda del visibile vale: $L_{Vlamp} = L_{lamp}\,\frac{5}{100} = 100\,\frac{5}{100} = 5\,W$

Confrontiamo la luminosità della stella con quella della lampadina nel visibile:

$$\frac{L_{Vstar}}{L_{Vlamp}} = \frac{4.46 \cdot 10^{27}\,W}{5\,W} = 8.92 \cdot 10^{26}$$

Affinché la lampadina ci appaia, nel visibile, luminosa come la stella, i loro flussi ϕ_l e ϕ_S devono essere uguali.
Il flusso di radiazione che riceviamo nel visibile dalla stella è:

$$\phi_S = \frac{L_{Vstar}}{4\,\pi\,d^2} = \frac{4.46 \cdot 10^{27}}{4\,\pi\,(32.6 \cdot 9460 \cdot 10^{12})^2} = \frac{4.46 \cdot 10^{27}}{1.20 \cdot 10^{36}} = 3.72 \cdot 10^{-9}\,W\,m^{-2}$$

mentre il flusso di radiazione che riceviamo nel visibile dalla lampadina posta a una distanza r è:

$$\phi_l = \frac{L_{Vlamp}}{4\,\pi\,r^2} = \frac{5}{4\,\pi\,r^2}$$

E quindi posto: $\phi_S = \phi_l$ segue che: $\frac{5}{4\,\pi\,r^2} = 3.72 \cdot 10^{-9}$

da cui si ricava: $r = \sqrt{\frac{5}{4\,\pi\,3.72 \cdot 10^{-9}}} = 10340\,m = 10.34\,km$

3. Tre stelle da fotografare.

La sera del 20 Aprile 2016 a Milano è possibile osservare tre stelle di uguale magnitudine apparente le cui coordinate sono:

Star 1 ($\alpha_{2016} = 6^h\, 30^m$, δ_{2016} = +35° 20′);
Star 2 ($\alpha_{2016} = 6^h\, 30^m$, δ_{2016} = +34° 40′);
Star 3 ($\alpha_{2016} = 6^h\, 24^m$, δ_{2016} = +35° 20′).

Le stelle vengono osservate con un telescopio di apertura D = 200 mm e rapporto focale *f/10*, sul cui piano focale è posta una camera fotografica il cui CCD ha dimensioni 4096 x 4096 pixels con ciascun pixel di forma quadrata e lato lpix = 6.4 μm. E' possibile ottenere un'immagine in cui compaiono insieme Star 1 e Star 2? E' possibile ottenere un'immagine in cui compaiono insieme Star 1 e Star 3?

Soluzione.

Poiché le coordinate sono riferite all'epoca attuale (2016) non è necessaria nessuna correzione per la precessione. Per esprimere una differenza di ascensione retta (ΔAR) in unità angolari, dobbiamo considerare che all'equatore celeste 24^h di ascensione retta (AR) equivalgono a 360° (e quindi 1^h = 15°). In generale, detta K la differenza di AR espressa in unità angolari all'equatore celeste si ha: K = 360° · ΔAR / 24. Se invece una stella è posta a una declinazione δ occorrerà moltiplicare il valore ottenuto per cos δ.

La distanza angolare ($\Delta_{1\text{-}2}$) tra Star 1 e Star 2, che hanno la stessa AR, vale: $\Delta_{1\text{-}2} = \delta_1 - \delta_2$ = 40′ = 2400″. La distanza angolare ($\Delta_{1\text{-}3}$) tra Star 1 e Star 3, che hanno la stessa declinazione, vale: $\Delta_{1\text{-}3}$ = [360° · ($\alpha_1 - \alpha_2$) / 24] · cos (35° 20′) = 1°.5 · cos (35° 20′) = 1°.224 = 73′.4 = 4405″

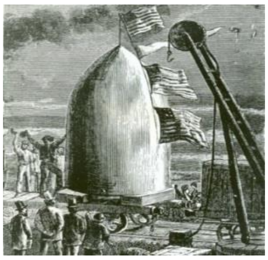
La focale del telescopio vale: F = 10 · 200 = 2000 mm = 200 cm. Il rivelatore CCD della camera è un quadrato con lato pari a: L = 4096 · lpix = 4096 · 6.4 μm = 2.62 cm e diagonale D = $\sqrt{2}\, L = 3.71\ cm$

Queste dimensioni lineari sul piano focale corrispondono ad angoli nel cielo di:

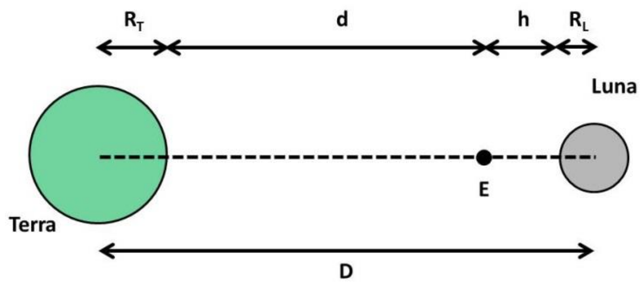
$\alpha_1 = arctg\frac{L}{F}$ = 0°.75 = 45′ = 2700″ e $\alpha_2 = arctg\frac{D}{F}$ = 1°.06 = 63′.6 = 3816″

Vediamo quindi che è possibile ottenere un'immagine in cui compaiono insieme Star 1 e Star 2, mentre non è possibile ottenere un'immagine in cui compaiono insieme Star 1 e Star 3.

4. Il fantastico progetto del "Gun Club".



Nel romanzo "Dalla Terra alla Luna" i soci del "Gun Club" costruiscono un cannone per sparare un proiettile dalla superficie della Terra a quella della Luna. Calcolate la velocità minima con cui deve essere sparato un proiettile, che è privo di ulteriore propulsione, per fargli raggiungere la Luna. Considerare il problema come unidimensionale, trascurando le velocità di rotazione e rivoluzione della Terra e della Luna, la resistenza dell'aria e le eccentricità delle orbite.



Soluzione. Il proiettile, lanciato lungo la verticale verso la Luna, deve avere una velocità iniziale tale da fargli raggiungere il punto, che indichiamo con "E", in cui il campo gravitazionale della Terra e quello della Luna sono uguali (in modulo e direzione, ma hanno verso opposto). Consideriamo la figura a sinistra (che ovviamente non è in scala) e indichiamo con "d" la distanza di "E" dalla superficie della Terra, con "h" la distanza di "E" dalla superficie della Luna, con R_T e R_L i raggi della Terra e della Luna.

Il semiasse maggiore dell'orbita della Luna ("D"), che, per definizione, unisce i centri dei due oggetti celesti vale quindi: $D = R_T + d + h + R_L$.

Poiché $R_L + h = D - d - R_T$, detta "m" la massa del proiettile, la relazione di uguaglianza tra le forze gravitazionali di Terra e Luna nel punto "E" è data dalla relazione: $\frac{GM_T m}{(R_T+d)^2} = \frac{GM_L m}{(D-R_T-d)^2}$

da cui si ottiene: $(D - R_T - d)^2 M_T = (R_T + d)^2 M_L$

e quindi: $(D - R_T - d)\sqrt{\frac{M_T}{M_L}} = (R_T + d)$

da cui ricaviamo: $d \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{M_T}{M_L}}\right) = D \cdot \sqrt{\frac{M_T}{M_L}} - R_T \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{M_T}{M_L}}\right)$

ed essendo $\sqrt{\frac{M_T}{M_L}} = 9.01$

$d = \frac{9.01 \cdot D - 10.01 \cdot R_T}{10.01} = 339.6 \cdot 10^3 km = 339.6 \cdot 10^6 m$

Applichiamo ora il principio di conservazione dell'energia meccanica per calcolare la velocità v_0 da imprimere al proiettile per fargli raggiungere il punto "E". Imponiamo che l'energia iniziale del proiettile sulla superficie terrestre sia uguale a quella alla distanza "d" dalla superficie, dove la velocità sarà nulla:

$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{G M_T m}{R_T} - \frac{G M_L m}{D - R_T} = -\frac{G M_T m}{R_T + d} - \frac{G M_L m}{D - R_T - d}$ da cui otteniamo:

$v_0^2 = 2\,G \cdot \left[\frac{M_T}{R_T} - \frac{M_T}{R_T + d} + \frac{M_L}{D - R_T} - \frac{M_L}{D - R_T - d}\right]$ e quindi :

$v_0 = \sqrt{2\,G \cdot \left[\frac{M_T \cdot d}{R_T(R_T + d)} - \frac{M_L \cdot d}{(D - R_T)(D - R_T - d)}\right]}$ ed infine:

$$v_0 = \sqrt{2Gd\left[\frac{M_T}{R_T(R_T+d)} - \frac{M_L}{(D - R_T)(D - R_T - d)}\right]} = \sqrt{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 339.6 \cdot 10^6 \left(\frac{5.97 \cdot 10^{24}}{2.21 \cdot 10^{15}} - \frac{7.35 \cdot 10^{22}}{1.45 \cdot 10^{16}}\right)} = 11.1\ km/sec$$

Quindi affinché il proiettile raggiunga la Luna dovrà avere una velocità iniziale appena superiore a v_0, in modo che arrivi nel punto "E" con velocità anche di pochissimo maggiore di zero. Superato "E" cadrà sulla Luna per effetto della forza di gravità lunare.

5. La magnitudine di due galassie.

Una galassia a spirale dista dal Sole D = 11.46 · 10^6 anni luce e ha magnitudine apparente superficiale media m_{sup} = 21.6 mag/arcsec^2. Sappiamo che il suo diametro è di 10^5 anni luce e che la direzione di osservazione forma un angolo di 90° con il suo piano galattico. Una seconda galassia ha le stesse caratteristiche della prima e si trova alla stessa distanza, ma il suo piano galattico forma con la direzione di osservazione un angolo di 35°. Calcolare la magnitudine apparente integrata delle due galassie e dire se, nelle migliori condizioni osservative, è possibile osservarle a occhio nudo. Lo spessore del piano galattico delle due galassie può essere trascurato nei calcoli.

Soluzione. Dalla distanza (D) della prima galassia e dal suo diametro possiamo calcolare la sua dimensione angolare (A_1) che risulta:

$A_1 = \text{arctg}\frac{H}{D} = 30'$ = 1800 arcsec.

Poiché il piano galattico della prima galassia forma un angolo di 90° con la linea di vista, la galassia è osservata "di faccia" e quindi possiamo assumere una forma circolare (ottima approssimazione per le spirali). Con tale approssimazione l'area apparente è data dalla relazione:

$AG_1 = \pi \cdot \left(\frac{A_1}{2}\right)^2 = 2.54 \cdot 10^6\ arcsec^2$.

La seconda galassia, poiché la direzione di osservazione forma con il suo piano galattico un angolo di 35° e il suo spessore è trascurabile, ci apparirà come un'ellisse i cui assi maggiore e minore (A_2 e B_2) varranno:
$A_2 = A_1$ e $B_2 = A_1 \cdot \sin 35°$ = 17'.2 = 1032 arcsec.

Quindi l'area apparente della seconda galassia è data dalla relazione: $AG_2 = \pi \cdot \frac{A_2}{2} \cdot \frac{B_2}{2} = 1.46 \cdot 10^6\ arcsec^2$.

La magnitudine apparente integrata di un oggetto diffuso è data dalla relazione: $m_{int} = m_{sup} - 2.5 \log A$ (con "A" area totale apparente). Nel caso in esame avremo quindi: m_{Gal1} = 5.59, m_{Gal2} = 6.19. Anche se la magnitudine integrata della prima galassia è inferiore al limite di visibilità a occhio nudo nelle migliori condizioni osservative (m ~ 6), bisogna considerare che si tratta di una magnitudine integrata e non della magnitudine di un oggetto puntiforme. Quindi nessuna delle due galassie è osservabile a occhio nudo. A titolo di confronto si consideri che la galassia di Andromeda ha una magnitudine integrata di 4.40 e risulta osservabile solo da zone con basso inquinamento luminoso e solo in notti chiare e senza Luna.

Olimpiadi Italiane di Astronomia 2016

Finale Nazionale – 20 Aprile 2016

Alcuni dati di interesse

Tabella 1 – Sole

Raggio medio	695475 km	Età stimata	$4.57 \cdot 10^{9}$ anni
Massa	$1.99 \cdot 10^{30}$ kg	Classe spettrale	G2 V
Temperatura superficiale	5778 K	Posizione nel diagramma HR	Sequenza Principale
Magnitudine apparente dalla Terra	- 26.74	Distanza media dal centro galattico	27000 anni-luce
Magnitudine assoluta	+ 4.83	Periodo di rivoluzione intorno al centro galattico	$2.5 \cdot 10^{8}$ anni

Tabella 2 – Sistema Solare

	Mercurio	Venere	Terra	Luna	Marte	Giove	Saturno	Urano	Nettuno
Raggio medio (km)	2440	6052	6378	1738	3397	71493	60267	25557	24766
Massa (kg)	$3.30\cdot10^{23}$	$4.87\cdot10^{24}$	$5.97\cdot10^{24}$	$7.35\cdot10^{22}$	$6.42\cdot10^{23}$	$1.90\cdot10^{27}$	$5.69\cdot10^{26}$	$8.68\cdot10^{25}$	$1.02\cdot10^{26}$
Semiasse maggiore dell'orbita (km)	$57.91\cdot10^{6}$	$108.2\cdot10^{6}$	$149.6\cdot10^{6}$	$384.4\cdot10^{3}$	$227.9\cdot10^{6}$	$778.4\cdot10^{6}$	$1.427\cdot10^{9}$	$2.871\cdot10^{9}$	$4.498\cdot10^{9}$
Periodo orbitale	87.969 ^{g}	224.70 ^{g}	365.26 ^{g}	27.322 ^{g}	686.97 ^{g}	11.863 ^{a}	29.447 ^{a}	84.017 ^{a}	164.79 ^{a}
Eccentricità dell'orbita	0.2056	0.0068	0.0167	0.0549	0.0934	0.0484	0.0542	0.0472	0.0086
Tipo	roccioso	roccioso	roccioso	roccioso	roccioso	gassoso	gassoso	gassoso	gassoso

Tabella 3 – Area della superficie per figure geometriche notevoli

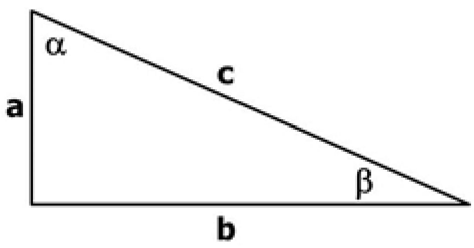
	Triangolo	Rettangolo	Quadrato	Cerchio	Ellisse	Sfera
Area	b h / 2	$L_1 L_2$	L^2	πR^2	π a b	$4 \pi R^2$

Tabella 4 – Costanti fisiche

Nome	Simbolo	Valore	Unità di misura
Costante di Stefan-Boltzmann	σ	$5.67 \cdot 10^{-8}$	W m^{-2} K^{-4}
Velocità della luce nel vuoto	c	299792	km s^{-1}
Costante di Gravitazione Universale	G	$6.67 \cdot 10^{-11}$	m^3 kg^{-1} s^{-2}
Accelerazione di gravità al livello del mare	g	9.81	m s^{-2}

Tabella 5 – Formule per i triangoli rettangoli

Teorema di Pitagora	$c^2 = a^2 + b^2$
Funzioni trigonometriche	$a = c \operatorname{sen} \beta$ $\quad a = c \cos \alpha$ $\quad a = b \tan \beta$



Nota: I valori numerici presenti nelle tabelle sono tutti in notazione scientifica