Olimpiadi Italiane di Astronomia 2010

Finale Nazionale

Torino - 18 Aprile 2010

Prova Teorica - Categoria JUNIOR

Problema 1-J. Considerate quattro abitanti di Giove, Terra, Marte e Venere, ciascuno in piedi sulla superficie del proprio pianeta. Contemporaneamente, i 4 personaggi fanno cadere un euro da un metro dalla superficie. Su quale pianeta la moneta arriva prima al suolo e perché? Indicare quali approssimazioni bisogna fare nel ragionamento. Si trascuri la circostanza che Giove non ha nella realtà una superficie solida.

Soluzione: *Un corpo di massa m è attratto dal pianeta di massa M secondo la Legge di Gravitazione Universale:*

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

con r = R + d pari alla somma del raggio del pianeta e della distanza del corpo dal suolo.

Nel nostro caso, essendo le 4 monete uguali e ad uguale distanza dalla superficie sui 4 pianeti, sono costanti sia d che m per i 4 casi. La forza con cui ciascun pianeta attira un corpo a 1 metro dalla sua superficie sarà intuitivamente proporzionale al rapporto tra la massa del pianeta ed il quadrato del raggio:

$$F_{PIANETA} = C\frac{M_{PIANETA}}{R^2_{PIANETA}}$$

dove C è indipendente dal pianeta. Trascurando altri fattori (tra cui l'attrito), il tempo impiegato dal corpo per arrivare al suolo è inversamente proporzionale alla forza con cui il corpo è attratto. Riportiamo dunque in tabella le forze esercitate sui 4 pianeti (a meno della costante G) e l'ordine di arrivo previsto per le 4 monete. Per svolgere il problema devo trascurare l'attrito, il fatto che Giove non abbia una superficie solida e le diverse atmosfere dei pianeti.

Pianeta	***Massa (masse terrestri)***	***Raggio (raggi terrestri)***	***Forza esercitata dal pianeta (in fattore di proporzionalità a C)***	**Ordine di arrivo**
Terra	1	1	C x 1 /1 ^2= C	**2**
Marte	0,107	0,533	C x 0,107 / 0,533 ^2 = C x 0,37664	**4**
Giove	317,8	11,21	C x 318,8 / 11,21 ^2 = C x 2,52896	**1**
Venere	0,815	0,949	C x 0,815 / 0,949 ^2 = C x 0,90495	**3**

Problema 2-J. Per qualche giorno a metà giugno, un orso bianco sosta proprio al polo Nord. In quel periodo la Luna è piena. Può l'orso vederla in cielo?

Soluzione: *Nei giorni attorno al solstizio d'estate il Sole occupa in cielo il punto più settentrionale dell'eclittica. La sua declinazione è prossima a +23°. Al polo Nord l'equatore celeste coincide con l'orizzonte e quindi la declinazione del Sole ha lo stesso valore della sua altezza sull'orizzonte. Nel suo moto apparente diurno il Sole percorre allora non un cerchio massimo, ma un cerchio parallelo all'orizzonte (un almucantarat) ad altezza 23° senza tramontare. La Luna piena appare tale se si trova in posizione esattamente opposta al Sole. Quindi, anche considerata l'inclinazione della sua orbita sull'eclittica (circa 5°), nel corso di quelle giornate si trova sempre sotto l'orizzonte e l'orso non può vederla in cielo.*

Problema 3-J. Il 29 marzo 2006 si è verificata un'eclisse totale di Sole, visibile dall'Africa settentrionale e dal Mediterraneo orientale. Quale fase aveva la Luna il 29 marzo 2007, cioè esattamente un anno dopo?

Soluzione: *Le eclissi di Sole si verificano necessariamente quando la Luna è nuova, cioè quando si trova in direzione del Sole. Conosciamo peraltro il periodo in cui si ripetono le fasi lunari: è il mese sinodico T = 29,5306 giorni. Dividiamo allora i 365 giorni dell'intervallo (il 2007 è anno non bisestile) per quel valore. Risultano 12 mesi lunari completi più un'eccedenza di 0,36 mesi sinodici, pari a 11 giorni di età della Luna. Essa avrà quindi fase intermedia tra il primo quarto e la Luna piena.*

Problema 4-J. F. Reddoloso e P. Inguino sono due amici astronomi. Il 21 marzo dialogano al telefono: "Carissimo", dice P. Inguino, " il Sole sta passando al meridiano proprio in questo momento. Anche se sta iniziando la brutta stagione, è davvero straordinario essere qui a Dome C, in Antartide!". "Sono contento per te", replica F. Reddoloso, "ma io preferisco il calduccio di Pino Torinese. Qui sta iniziando finalmente la bella stagione, anche se io vedrò il Sole passare al meridiano più tardi!". Sapendo che Dome C ha coordinate φ = 123° 20′ E, λ = 75° 06′ S e che Pino Torinese si trova invece a coordinate φ = 7° 46′ E , λ = 45° 02′ N, si risponda alle seguenti domande: a) quale stagione sta iniziando a Dome C e quale, invece, a Pino Torinese ? b) quanto tempo passa, dal momento della telefonata, prima che F. Reddoloso veda passare il Sole al meridiano ? c) a che altezza sull'orizzonte, e in che direzione, i due astronomi vedono passare il Sole al meridiano ?

Soluzione. *Il 21 marzo inizia la primavera nell'emisfero boreale (quindi a Pino Torinese) e l'autunno in quello australe (quindi a Dome C). Il tempo che trascorre tra il passaggio al meridiano nelle due località è legato alla differenza di longitudine* $\Delta\varphi = \varphi_{DC} - \varphi_{PT}$ = 123° 20′ – 7° 46′ = 115° 34′ = 115,57° *sapendo che ad ogni 15° di intervallo di longitudine corrisponde un'ora di tempo si avrà:* $\Delta t = \Delta\varphi / 15$ = 7,705 ore = 7 ore 42 min 18 sec *ovvero F. Reddoloso vedrà passare il Sole al meridiano 7 ore, 42 minuti e 18 secondi dopo P. Inguino. Per calcolare infine l'altezza, si usa la relazione* $h = 90° - \lambda + \delta$, *dove* δ *è la declinazione del Sole. Il 21 marzo, tuttavia, il Sole giace sull'equatore celeste, quindi* δ = 0° *e pertanto* h_{DC} = 90° - 75° 06′ = 14° 54′ *mentre* h_{PT} = 90° - 45° 02′ = 44° 58′. *Le direzioni in cielo sono opposte, da Pino Torinese F. Reddoloso vede il Sole passare al meridiano in direzione Sud, mentre da Dome C P. Inguino vede il Sole passare al meridiano in direzione Nord.*

Problema 5-J: Il Sole dista 27000 anni-luce dal centro della nostra galassia, e compie una rivoluzione completa intorno ad esso in 250 milioni di anni. Schematizzando la galassia come un disco di 100000 anni-luce di diametro e spessore trascurabile, si fornisca una stima della sua massa totale. Si esprima il risultato in masse solari.

Soluzione. *Si deve applicare la Terza Legge di Keplero*

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \qquad \Rightarrow \qquad M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$$

dove a è la distanza dal centro della galassia, T il periodo di rivoluzione, G la costante di gravitazione universale ed M la massa della porzione di galassia contenuta entro un raggio di 27000 anni-luce. Convertiamo i dati in metri e secondi: a = 27000 anni-luce = $2{,}7 \times 10^4 \times 9{,}46 \times 10^{15}$ *m=*$2{,}55 \times 10^{20}$ *m T = 250 milioni di anni =* $2{,}5 \times 10^8 \times 3{,}15 \times 10^7$ *s =* $7{,}87 \times 10^{15}$ *s ed otteniamo:*

$$M = \frac{4\pi^2 \times (2{,}55\times 10^{20})^3}{6{,}67\times 10^{-11} \times (7{,}87\times 10^{15})^2} = \frac{6{,}55\times 10^{62}}{4{,}13\times 10^{21}} = 1{,}59\times 10^{41} \quad Kg$$

Per ottenere infine la massa totale M_{TOT} *della nostra galassia, dobbiamo considerare che, nell'approssimazione fatta, la massa è proporzionale all'area del disco su cui è distribuita, per cui:*

$$M_{TOT} : \pi \cdot 50000^2 = M : \pi \cdot 27000^2$$

da cui

$$M_{TOT} = M \times (50000 / 27000)^2 = 5{,}45 \times 10^{41} \text{ Kg.}$$

Essendo la massa del Sole $M_{SOLE} = 1{,}989 \times 10^{30}$ *Kg, se ne ricava in definitiva*

$$M_{TOT} = \frac{5{,}45\times 10^{41}}{1{,}989\times 10^{30}} = 2{,}74\times 10^{11} M_{SOLE}$$

cioè la nostra galassia ha una massa di circa 274 miliardi di masse solari.