

Campionati Italiani di Astronomia

Corso di preparazione alla Gara Interregionale



Categoria Junior 1 - Soluzioni lezione 1

1. Svolgete i seguenti calcoli esprimendo i risultati con il corretto numero di cifre significative:

$$\begin{array}{llll}
 10^3 \cdot 10^5 = & (10^3)^3 = & 10^8 + 10^2 = & 25.764 + 113.22 = \\
 2.347 + 3.15 = & 3.2576 \cdot 10^3 + 1.1322 \cdot 10^2 = & & 3.567 \cdot 10^3 \cdot 2.56 \cdot 10^4 = \\
 \frac{10^{20}}{10^{-11} \cdot 10^{24}} = & \frac{25.764}{113.22} = & \frac{25.764}{13.22} = & \frac{3.274 \cdot 10^5}{2.22 \cdot 10^2} =
 \end{array}$$

Soluzione

$$\begin{array}{llll}
 10^3 \cdot 10^5 = 10^8 & (10^3)^3 = 10^9 & 10^8 + 10^2 \approx 10^8 \text{ (poiché } 10^2 \text{ è trascurabile rispetto a } 10^8) & \\
 25.764 + 113.22 \approx 138.98 = 1.3898 \cdot 10^2 & & 2.347 + 3.15 \approx 5.50 & \\
 3.2576 \cdot 10^3 + 1.1322 \cdot 10^2 \approx 3.3708 \cdot 10^3 & & 3.567 \cdot 10^3 \cdot 2.56 \cdot 10^4 \approx 9.13 \cdot 10^7 & \\
 \frac{10^{20}}{10^{-11} \cdot 10^{24}} = 10^{20 - (-11 + 24)} = 10^7 & & \frac{25.764}{113.22} \approx 0.22756 = 2.2756 \cdot 10^{-1} & \\
 \frac{25.764}{13.22} \approx 1.949 & & \frac{3.274 \cdot 10^5}{2.22 \cdot 10^2} \approx 1.47 \cdot 10^3 &
 \end{array}$$

Nota.

In una somma, o sottrazione, il numero di cifre dopo la virgola da riportare nel risultato, con gli opportuni arrotondamenti, è quello del valore che ne ha un numero minore.

In un prodotto, o divisione, bisogna considerare le “cifre significative”. Dalla teoria degli errori sappiamo che possiamo, con buona approssimazione, esprimere il risultato finale di un prodotto (o di un rapporto) con un numero di cifre significative uguale al numero di cifre significative della quantità misurata con precisione minore. Se una misura ha valore 2.576 significa che non si è in grado di apprezzare quantità inferiori al millesimo, l'errore sul dato (a meno di diversa indicazione) è di ± 0.001 e le cifre significative sono 4. Per il valore 113.22 le cifre significative sono 5; per i valori 0.7340 e 0.7304 le cifre significative sono 4, per il valore 0.734 le cifre significative sono 3, per il valore 0.0042 le cifre significative sono 2. Quindi gli zeri a sinistra della prima cifra diversa da zero non sono significativi, mentre lo sono quelli “interni” a un valore o a destra dell'ultima cifra diversa da zero.

2. Considerate un'ellisse con semiasse maggiore pari a 7.02 UA e semiasse minore pari a 5.52 UA. Calcolate l'eccentricità dell'ellisse e la distanza tra i due fuochi.

Soluzione

Detti **a**, **b** ed **e** semiasse maggiore e minore ed eccentricità dell'ellisse e **c** la distanza di uno dei fuochi dal centro dell'ellisse, si ha:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} \approx \sqrt{1 - \left(\frac{30.5 \text{ UA}^2}{49.3 \text{ UA}^2}\right)} \approx \sqrt{1 - 0.619} \approx 0.617$$

Detta **D** la distanza tra i due fuochi si ha infine:

$$D = 2c = 2 \cdot \sqrt{a^2 - b^2} = 2 \sqrt{49.3 \text{ UA}^2 - 30.5 \text{ UA}^2} \approx 8.67 \text{ UA}$$

3. Un asteroide dista dal Sole 2.978 UA al perielio e 9.022 UA all'afelio.
1. Determinate il semiasse maggiore, in UA e in km, e l'eccentricità dell'orbita;
 2. calcolate il periodo di rivoluzione dell'asteroide;
 3. stimate di quanto cambierebbe il periodo di rivoluzione se l'eccentricità dell'orbita si dimezzasse.

Soluzione

1. Dette D_a e D_p le distanze all'afelio e al perielio, il semiasse maggiore a dell'orbita è dato da:

$$a = \frac{D_p + D_a}{2} = \frac{2.978 \text{ UA} + 9.022 \text{ UA}}{2} = 6.000 \text{ UA} \approx 897.6 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Nota D_a l'eccentricità e , ricordando che $D_a = a(1 + e)$, vale:

$$e = \frac{D_a}{a} - 1 = \frac{9.022 \text{ UA}}{6.000 \text{ UA}} - 1 \approx 0.5037$$

2. Il periodo di rivoluzione T in anni si ottiene dalla III legge di Keplero:

$$T = \sqrt{a^3} \approx \sqrt{6.000^3} \approx 14.70 \text{ anni}$$

3. Poiché nella formula del calcolo del periodo l'eccentricità non compare, segue che il periodo di rivoluzione non dipende dall'eccentricità dell'orbita, ma solo dal semiasse maggiore.

4. Per gli otto pianeti del sistema solare calcolate il valore medio della forza di attrazione gravitazionale Sole-pianeta. Ordinate i pianeti per valori crescenti dell'attrazione gravitazionale.

Soluzione

Detti M_\odot e M_p la massa del Sole e di un pianeta e d_p il corrispondente semiasse maggiore dell'orbita, otteniamo il valore medio della forza F Sole-Pianeta (in Newton) dalla legge di gravitazione universale:

$$F = G \frac{M_\odot \cdot M_p}{d_p^2}$$

Pianeta	Forza Sole-Pianeta
Mercurio	$1.307 \cdot 10^{22} \text{ N}$
Venere	$5.519 \cdot 10^{22} \text{ N}$
Terra	$3.542 \cdot 10^{22} \text{ N}$
Marte	$1.640 \cdot 10^{21} \text{ N}$
Giove	$4.161 \cdot 10^{23} \text{ N}$
Saturno	$3.706 \cdot 10^{22} \text{ N}$
Urano	$1.398 \cdot 10^{21} \text{ N}$
Nettuno	$6.719 \cdot 10^{20} \text{ N}$

L'ordine dei pianeti per valori crescenti della forza gravitazionale Sole-pianeta risulta quindi:
Nettuno, Urano, Marte, Mercurio, Terra, Saturno, Venere, Giove.

5. Calcolate il modulo della velocità orbitale della Luna intorno alla Terra e il modulo della velocità orbitale della Terra intorno al Sole nell'approssimazione di orbite circolari con raggio pari al semiasse maggiore.

Soluzione

Detti a_L e O_L il semiasse maggiore e la lunghezza dell'orbita della Luna e T_L il periodo di rivoluzione della Luna attorno alla Terra, il modulo della velocità orbitale della Luna v_L vale:

$$v_L = \frac{O_L}{T_L} = \frac{2\pi a_L}{T_L} \approx \frac{2\pi \cdot 384.4 \cdot 10^3 \text{ km}}{27.322 \text{ g}} \approx \frac{2.415 \cdot 10^6 \text{ km}}{2.3606 \cdot 10^6 \text{ s}} \approx 1.023 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Detti \mathbf{a}_T e \mathbf{O}_T il semiasse maggiore e la lunghezza dell'orbita della Terra e \mathbf{T}_T il periodo di rivoluzione della Terra attorno al Sole, il modulo della velocità orbitale della Terra \mathbf{v}_T vale:

$$v_T = \frac{O_T}{T_T} = \frac{2 \pi a_T}{T_T} \simeq \frac{2 \pi \cdot 149.6 \cdot 10^6 \text{ km}}{365.26 \text{ g}} \simeq \frac{940.0 \cdot 10^6 \text{ km}}{3.1558 \cdot 10^7 \text{ s}} \simeq 29.79 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

6. Può una cometa in orbita attorno al Sole avere un periodo di rivoluzione di un anno e una distanza all'afelio maggiore del semiasse maggiore dell'orbita di Marte? Se sì, ricavate il valore minimo dell'eccentricità della sua orbita.

Soluzione

Se il periodo di rivoluzione \mathbf{T} della cometa è pari a un anno, il semiasse maggiore \mathbf{a}_c dell'orbita è pari a 1 UA:

$$a_c = \sqrt[3]{T^2} = 1 \text{ UA}$$

Il semiasse maggiore \mathbf{a}_M dell'orbita di Marte vale:

$$a_M \simeq 1.523 \text{ UA}$$

Detta e l'eccentricità dell'orbita, la distanza di un corpo all'afelio \mathbf{D}_A è data dalla relazione:

$$D_A = a (1 + e)$$

Quindi affinché la cometa abbia una distanza all'afelio maggiore del semiasse maggiore dell'orbita di Marte deve essere:

$$a_c (1 + e) = 1 \text{ UA} (1 + e) > 1.523 \text{ UA}$$

da cui:

$$(1 + e) > 1.523 \quad e > 1.523 - 1 \quad e > 0.523$$

7. La cometa di Halley dista dal Sole $8.767 \cdot 10^{10} \text{ m}$ al perielio e $5.248 \cdot 10^{12} \text{ m}$ all'afelio. Il modulo della sua velocità orbitale al perielio è di 54.6 km/s . Calcolare la sua velocità all'afelio in km/s e in m/s . Sapendo che l'ultimo passaggio della cometa di Halley al perielio si è verificato il 9 febbraio 1986, calcolate l'anno del più prossimo ritorno al perielio.

Soluzione

Dette $\mathbf{D}_A, \mathbf{V}_A, \mathbf{D}_P$ e \mathbf{V}_P le distanze e le velocità della cometa all'afelio e al perielio, dalla II legge di Keplero sappiamo che:

$$V_A \cdot D_A = V_P \cdot D_P$$

quindi:

$$V_A = \frac{D_P}{D_A} V_P = \frac{8.767 \cdot 10^{10} \text{ m}}{5.248 \cdot 10^{12} \text{ m}} \cdot 54.6 \frac{\text{km}}{\text{s}} \simeq 0.912 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 912 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Note le distanze all'afelio e al perielio ricaviamo il semiasse maggiore \mathbf{a} dell'orbita:

$$a = \frac{D_a + D_p}{2} = \frac{8.767 \cdot 10^{10} \text{ m} + 5.248 \cdot 10^{12} \text{ m}}{2} \simeq 2.668 \cdot 10^{12} \text{ m} \simeq 17.83 \text{ UA}$$

Poiché la cometa di Halley orbita intorno al Sole, il suo periodo di rivoluzione \mathbf{T} in anni vale:

$$T = \sqrt{a^3} = \sqrt{17.83^3} \simeq 75.29 \text{ anni}$$

L'anno \mathbf{A} del ritorno al perielio (arrotondando all'intero più prossimo) sarà quindi:

$$A = 1986 + 75 = 2061$$

Nota.

Il periodo orbitale della Halley non è perfettamente costante a causa dell'influenza gravitazionale dei pianeti (in particolare Giove). La data attualmente prevista per il prossimo passaggio al perielio è il 29 luglio 2061.

8. Tra il 21 Marzo e il 22 Settembre trascorrono 186 giorni, mentre tra il 23 Settembre e il 20 Marzo ne trascorrono 179. Eppure in ognuno dei due intervalli di tempo la Terra percorre esattamente metà della sua orbita intorno al Sole. Date una spiegazione del fenomeno.

Soluzione

Dalla II legge di Keplero sappiamo che la velocità con cui un pianeta si muove lungo la sua orbita intorno al Sole dipende dalla distanza ed è massima al perielio e minima all'afelio. Nel periodo 21 marzo - 22 settembre è compreso l'istante in cui la Terra passa all'afelio (inizio luglio), quindi in questo intervallo la Terra si muove più lentamente di quanto non faccia nell'altro intervallo, quello invernale, in cui è compreso l'istante (inizio gennaio) in cui passa al perielio.

9. Un asteroide ha semiasse maggiore dell'orbita ed eccentricità rispettivamente pari a $329.7 \cdot 10^6 \text{ km}$ e 0.221. Una cometa dista dal Sole 3.604 UA all'afelio e 0.804 UA al perielio. Quanto vale il periodo di rivoluzione dell'asteroide? Quale dei due corpi ha periodo di rivoluzione maggiore?

Soluzione

In UA il semiasse maggiore a_A dell'orbita dell'asteroide vale:

$$a_A \simeq \frac{329.7 \cdot 10^6 \text{ km}}{149.6 \cdot 10^6 \text{ km}} \simeq 2.204 \text{ UA}$$

Il suo periodo di rivoluzione T in anni vale:

$$T = \sqrt{a_A^3} \simeq \sqrt{2.204^3} \simeq \sqrt{10.71} \simeq 3.272 \text{ anni}$$

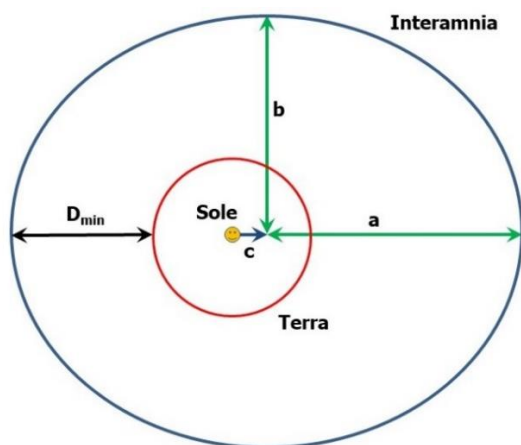
Dette D_a la distanza all'afelio e D_p quella al perielio, il semiasse maggiore a_c dell'orbita della cometa si ottiene dalla relazione:

$$a_c = \frac{D_a + D_p}{2} \simeq \frac{3.604 \text{ UA} + 0.804 \text{ UA}}{2} \simeq 2.204 \text{ UA}$$

Poiché il semiasse maggiore dell'orbita dei due corpi è uguale, sarà uguale anche il periodo di rivoluzione che vale per entrambi 3.272 anni.

10. L'Asteroide 704 "Interamnia", scoperto nel 1910, percorre in 5.35 anni un'orbita stabile intorno al Sole, molto prossima al piano dell'eclittica, con eccentricità pari a 0.151. Con l'ausilio di un disegno si dica se l'asteroide costituisce una minaccia per la Terra, ovvero se può collidere con essa. Stimate infine la sua distanza minima dal nostro pianeta.

Soluzione



Detto T il periodo di rivoluzione, il semiasse maggiore a dell'orbita di 704 Interamnia in UA vale:

$$a = \sqrt[3]{T^2} = \sqrt[3]{5.35^2} \simeq 3.06 \text{ UA}$$

Nota l'eccentricità e , il semiasse minore b dell'orbita è dato da:

$$b = a \sqrt{1 - e^2} \simeq 3.06 \text{ UA} \cdot \sqrt{1 - 0.0228} \simeq 3.02 \text{ UA}$$

La distanza c del Sole rispetto all'intersezione dei semiassi è data da:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \simeq \sqrt{3.06^2 - 3.02^2} \simeq 0.493 \text{ UA}$$

L'orbita dell'asteroide, sul piano dell'eclittica e stabile, si trova ben all'esterno di quella della Terra, come ben visibile nel disegno qui sopra. Quindi l'asteroide non costituisce una minaccia per il nostro pianeta.

La minima distanza possibile D_{min} dalla Terra si ha nel caso in cui si verificano contemporaneamente le tre seguenti circostanze: asteroide in opposizione, asteroide al perielio, Terra all'afelio. In questa

configurazione, detti D_{Ap} la distanza dal Sole dell'asteroide al perielio, a_T ed e_T semiasse maggiore ed eccentricità dell'orbita della Terra e D_{Ta} la distanza della Terra dal Sole all'afelio, la distanza di Interamnia dalla Terra in UA sarebbe:

$$D_{min} = D_{Ap} - D_{Ta} = a(1 - e) - a_T(1 + e_T)$$

$$D_{min} \simeq 3.06 \text{ UA} (1 - 0.151) - 1 \text{ UA} (1 + 0.0167) \simeq 1.58 \text{ UA}$$

11. Un satellite artificiale descrive un'orbita circolare a un'altezza di 400 km dalla superficie terrestre. Calcolate il suo periodo di rivoluzione.

Soluzione

Detta M_T la massa della Terra e a il semiasse maggiore dell'orbita, ricaviamo il periodo T di un corpo di massa trascurabile in orbita attorno alla Terra dalla III legge di Keplero:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot M_T}}$$

Detto R_T il raggio della Terra e h l'altezza dalla superficie del satellite il semiasse maggiore dell'orbita vale:

$$a = R_T + h = 6378 \text{ km} + 400 \text{ km} = 6778 \text{ km}$$

si avrà quindi:

$$T \simeq \sqrt{\frac{39.48 \cdot (6778 \cdot 10^3 \text{ m})^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} \simeq$$

$$\simeq \sqrt{3.084 \cdot 10^7 \text{ s}^2} \simeq 5.554 \cdot 10^3 \text{ s} \simeq 92.57 \text{ m} \simeq 1 \text{ h } 33 \text{ m}$$

12. Un satellite artificiale orbita attorno alla Terra su un'orbita ellittica con semiassi maggiore e minore rispettivamente pari a $1.522 \cdot 10^4 \text{ km}$ e $1.321 \cdot 10^4 \text{ km}$. Calcolate la distanza minima del satellite al perigeo e all'apogeo rispetto alla superficie della Terra e il suo periodo di rivoluzione.

Soluzione

Detti a e b la lunghezza dei due semiassi, l'eccentricità e dell'orbita del satellite è data dalla relazione:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} \simeq \sqrt{1 - \left(\frac{1.745 \cdot 10^8 \text{ km}^2}{2.316 \cdot 10^8 \text{ km}^2}\right)} \simeq 0.4965$$

Le distanze del satellite dal centro della Terra al perigeo D_P e all'apogeo D_A valgono quindi:

$$D_P = a(1 - e) \simeq 7663 \text{ km} \quad D_A = a(1 + e) \simeq 2.278 \cdot 10^4 \text{ km}$$

La distanza minima di un satellite dalla superficie terrestre si ha quando un osservatore lo vede transitare allo zenith. Quindi per ottenere la distanza minima nei due casi (H_P e H_A) basta sottrarre il raggio della Terra alle distanze all'afelio e al perielio:

$$H_P = D_P - R_T \simeq 1285 \text{ km} \quad H_A = D_A - R_T \simeq 1.640 \cdot 10^4 \text{ km}$$

Applicando la III legge di Keplero generalizzata e considerando che la massa del satellite è ovviamente trascurabile rispetto a quella della Terra, il periodo di rivoluzione T è dato da:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot M_T}} \simeq \sqrt{\frac{39.48 \cdot 3.526 \cdot 10^{21} \text{ m}^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} \simeq$$

$$\simeq \sqrt{3.493 \cdot 10^8 \text{ s}^2} \simeq 1.869 \cdot 10^4 \text{ s} \simeq 311.5 \text{ minuti} \simeq 5 \text{ h } 12 \text{ minuti}$$

13. Un pianeta descrive attorno alla propria stella un'orbita circolare con raggio uguale a 1 UA e con periodo di rivoluzione uguale al periodo di rivoluzione della Terra attorno al Sole. Calcolate la massa della stella, considerando che rispetto ad essa la massa del pianeta è trascurabile.

Soluzione

Detti a il semiasse maggiore dell'orbita, T il periodo di rivoluzione e M_S la massa della stella, poiché la massa del pianeta è trascurabile, ricaviamo la massa della stella dalla III Legge di Keplero:

$$M_S = \frac{4 \pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2} \simeq \frac{4 \pi^2 \cdot (149.6 \cdot 10^9 \text{ m})^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot (3.156 \cdot 10^7 \text{ s})^2} \simeq 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 1 M_\odot$$

Nota.

La massa della stella poteva essere dedotta senza calcoli. Infatti, se il pianeta ha gli stessi parametri orbitali (semiasse maggiore e periodo) della Terra, la stella attorno a cui orbita deve avere la stessa massa del Sole.

14. Calcolate la massa di un pianeta che ha un diametro di 4880 km e accelerazione di gravità alla superficie pari a 3.70 m/s^2 .

Soluzione

Nota l'accelerazione di gravità in superficie g_P e il raggio R_P (pari ovviamente a metà del diametro), la massa del pianeta M_P è data dalla relazione:

$$M_P = \frac{g_P R_P^2}{G} \simeq \frac{3.70 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2440 \cdot 10^3 \text{ m})^2}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}} \simeq 3.30 \cdot 10^{23} \text{ kg}$$

15. Calcolate, supponendo che la vostra massa sia di 50.0 kg, il vostro peso sulla superficie della Luna. Supponete di raddoppiare il raggio della Luna a parità di massa, quanto diventerebbe il vostro peso?

Soluzione

Detti M_L e R_L la massa e il raggio della Luna, l'accelerazione di gravità g_L sulla superficie lunare vale:

$$g_L = \frac{G M_L}{R_L^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 7.342 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(1738 \cdot 10^3 \text{ m})^2} \simeq 1.622 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Quindi il peso P sulla Luna di una persona con una massa m pari a 50.0 kg è:

$$P = m \cdot g_L \simeq 50.0 \text{ kg} \cdot 1.623 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \simeq 81.2 \text{ N}$$

Se la Luna avesse stessa massa ma raggio doppio, l'accelerazione di gravità g_{L-2R} sulla superficie varrebbe:

$$g_{L-2R} = \frac{G M_L}{(2 R_L)^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 7.342 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(3476 \cdot 10^3 \text{ m})^2} \simeq 0.4055 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

L'accelerazione di gravità sarebbe quindi un quarto di quella attuale e il peso P_{2R} di una persona con una massa m pari a 50.0 kg sarebbe:

$$P_{2R} = m \cdot g_{L-2R} \simeq 50.0 \text{ kg} \cdot 0.4058 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \simeq 20.3 \text{ N}$$