Campionati Italiani di Astronomia 2023
Corso di preparazione alla Gara Interregionale

Categorie Senior/Master - Lezione 1

1. La cometa di Halley dista dal Sole $8.767 \cdot 10^{10}$ m al perielio e $5.248 \cdot 10^{12}$ m all'afelio. Il modulo della sua velocità orbitale al perielio è di 54.6 km/s. Calcolare la sua velocità all'afelio in km/s e in m/s. Sapendo che l'ultimo passaggio della cometa di Halley al perielio si è verificato il 9 febbraio 1986, calcolate l'anno del più prossimo ritorno al perielio.

Soluzione

Dette $\boldsymbol{D_A}, \boldsymbol{V_A}, \boldsymbol{D_P}$ e $\boldsymbol{V_P}$ le distanze e le velocità della cometa all'afelio e al perielio, dalla II legge di Keplero sappiamo che:

$$V_A \cdot D_A = V_P \cdot D_P$$

quindi:

$$V_a = \frac{D_p}{D_a} V_p = \frac{8.767 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m}}{5.248 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m}} \cdot 54.6\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \simeq 0.912\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = 912\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Note le distanze all'afelio e al perielio ricaviamo il semiasse maggiore $\boldsymbol{a}$ dell'orbita:

$$a = \frac{D_a + D_p}{2} = \frac{8.767 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m} + 5.248 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m}}{2} \simeq 2.668 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m} \simeq 17.83\ \mathrm{UA}$$

Poiché la cometa di Halley orbita intorno al Sole, il suo periodo di rivoluzione $\boldsymbol{T}$ in anni vale:

$$T = \sqrt{a^3} = \sqrt{17.83^3} \simeq 75.29\ anni$$

L'anno $\boldsymbol{A}$ del ritorno al perielio (arrotondando all'intero più prossimo) sarà quindi:

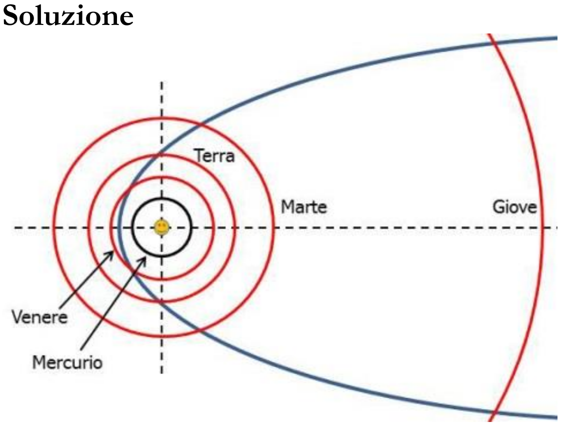
$$A = 1986 + 75 = 2061$$

Nota.

Il periodo orbitale della Halley non è perfettamente costante a causa dell'influenza gravitazionale dei pianeti (in particolare Giove). La data attualmente prevista per il prossimo passaggio al perielio è il 29 luglio 2061.

2. L'orbita di un asteroide ha semiasse maggiore di 7.143 UA e semiasse minore di 2.635 UA. Calcolate l'eccentricità dell'orbita e la distanza dell'asteroide dal Sole al perielio e all'afelio. Supponendo che l'asteroide orbiti in prossimità del piano dell'eclittica, quali sono i pianeti con cui potrebbe entrare in collisione? Questo asteroide fa parte della "Fascia principale degli Asteroidi" ? Includete nella soluzione uno o più disegni, possibilmente in scala, con le orbite dei pianeti e dell'asteroide.

Soluzione



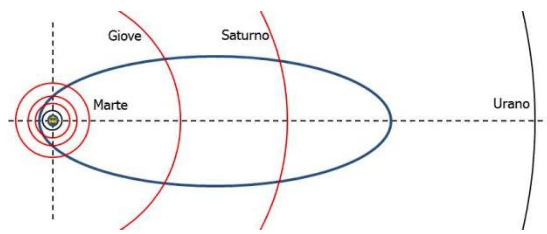
Dalle dimensioni dei semiassi maggiore **a** e minore **b** ricaviamo l'eccentricità $\boldsymbol{e}$:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{6.943}{51.02}\right)} = 0.9295$$

Le distanze dal Sole al perielio $\boldsymbol{d_P}$ e all'afelio $\boldsymbol{d_A}$ valgono:

$$d_P = a\,(1 - e) \simeq 0.5036\ \mathrm{UA}$$
$$d_A = a\,(1 + e) \simeq 13.78\ \mathrm{UA}$$

La distanza dei pianeti dal Sole in UA è circa: Mercurio = 0.4, Venere = 0.7, Terra = 1, Marte = 1.5, Giove = 5.2, Saturno = 9.5, Urano = 19.6, Nettuno = 30



L'asteroide potrebbe incrociare le orbite dei pianeti con distanza $\boldsymbol{D}$ dal Sole compresa nell'intervallo:

$$0.5036 < \ D < 13.78$$

cioè Venere, Terra, Marte, Giove e Saturno. La "Fascia principale degli Asteroidi" è compresa tra le orbite di Marte e di Giove, l'asteroide non ne fa parte.

3. L'orbita di un asteroide ha semiasse maggiore e minore rispettivamente pari a 7.143 UA e 2.635 UA. Si determini il periodo orbitale dell'asteroide e il valore del rapporto tra le velocità orbitali all'afelio e al perielio. Da quali parametri orbitali dipende il valore di detto rapporto?

Soluzione

Detto **a** il semiasse maggiore dell'orbita, il periodo orbitale **T** dell'asteroide in anni vale:

$$T = \sqrt{a^3} \simeq \sqrt{364.5} \simeq 19.09 \; anni$$

L'eccentricità **e** dell'orbita vale:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{6.943 \; UA^2}{51.02 \; UA^2}\right)} \simeq 0.9295$$

Dette $\boldsymbol{D_A}, \boldsymbol{V_A}, \boldsymbol{D_P}$ e $\boldsymbol{V_P}$ le distanze e le velocità dell'asteroide all'afelio e al perielio, dalla II legge di Keplero sappiamo che:

$$\mathrm{V_A} \cdot \mathrm{D_A} = \mathrm{V_P} \cdot \mathrm{D_P}$$

quindi:

$$\frac{V_A}{V_P} = \frac{D_P}{D_A} = \frac{a\,(1-e)}{a\,(1+e)} = \frac{1-e}{1+e} \simeq 0.03654 = 3.654 \cdot 10^{-2}$$

Quindi il rapporto delle velocità dipende unicamente dall'eccentricità dell'orbita.

4. Una cometa descrive un'orbita ellittica con eccentricità di 0.921 e distanza dal Sole al perielio di 0.451 UA. Calcolate quando tempo impiega per percorrere ognuna delle due semi-orbite separate dall'asse minore dell'ellisse.

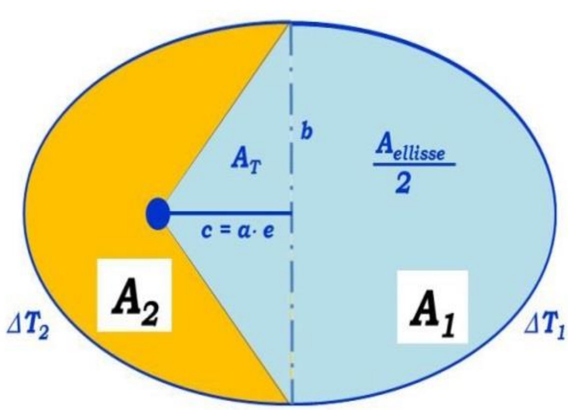
Soluzione

Detta $\boldsymbol{d_P}$ la distanza al perielio ed $\boldsymbol{e}$ l'eccentricità dell'orbita, i semiassi $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ valgono:

$$\mathrm{a} = \frac{\mathrm{d_P}}{(1-\mathrm{e})} \simeq \frac{0.451}{0.079} \simeq 5.71 \text{ UA} \qquad \mathrm{b} = \mathrm{a}\sqrt{1 - \mathrm{e}^2} \simeq 5.71 \cdot 0.390 \simeq 2.23 \text{ UA}$$

Il periodo orbitale **T** in anni vale:

$$\mathrm{T} = \sqrt{\mathrm{a}^3} \simeq \sqrt{186} \simeq 13.6 \text{ anni}$$



Rappresentazione non in scala

L'area totale $\boldsymbol{A_{ellisse}}$ dell'orbita è data dalla relazione:

$$\mathrm{A_{ellisse}} = \pi \, \mathrm{a} \, \mathrm{b} \simeq 40.0 \text{ UA}^2$$

La distanza $\boldsymbol{c}$ del fuoco che contiene il Sole dal centro dell'orbita della cometa vale:

$$\mathrm{c} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{e} \simeq 5.71 \text{ UA} \cdot 0.921 \simeq 5.26 \text{ UA}$$

L'area delle due semi-orbite è:

$$\mathrm{A_1} = \frac{\mathrm{A_{ellisse}}}{2} + \mathrm{c} \cdot \mathrm{b} \simeq 31.7 \text{ UA}^2$$

$$\mathrm{A_2} = \frac{\mathrm{A_{ellisse}}}{2} - \mathrm{c} \cdot \mathrm{b} \simeq 8.3 \text{ UA}^2$$

Detta $\boldsymbol{\Delta T_n}$ una qualsiasi frazione del periodo orbitale e $\boldsymbol{A_n}$ l'area spazzata dal raggio vettore nell'intervallo $\boldsymbol{\Delta T_n}$, dalla II legge di Keplero sappiamo che:

$$\Delta T_n : A_n = T : A_{ellisse}$$

da cui, detti $\boldsymbol{\Delta T_1}$ e $\boldsymbol{\Delta T_2}$ i tempi impiegati per percorrere le due semi-orbite, si ricava:

$$\Delta T_1 = \frac{A_1 \cdot T}{A_{ellisse}} \simeq \frac{31.7\ UA^2 \cdot 13.6\ anni}{40.0\ UA^2} \simeq 10.8\ anni$$

$$\Delta T_2 = \frac{A_2 \cdot T}{A_{ellisse}} \simeq \frac{8.3\ UA^2 \cdot 13.6\ anni}{40.0\ UA^2} \simeq 2.8\ anni$$

Nota.
Soluzione alternativa

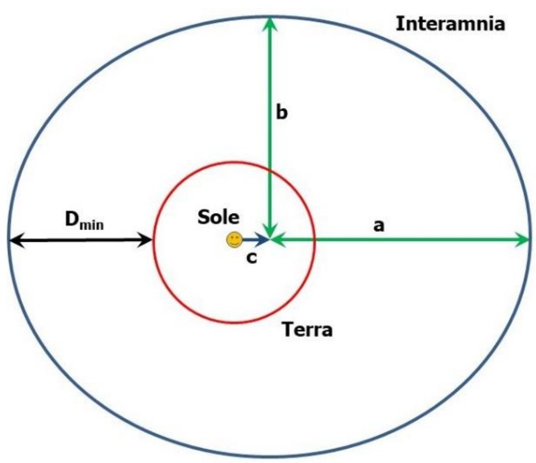
$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{A_1}{A_2} \qquad \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} + 1 = \frac{A_1}{A_2} + 1 \qquad \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{\Delta T_2} = \frac{A_1 + A_2}{A_2} \qquad \frac{T}{\Delta T_2} = \frac{A}{A_2} \qquad \Delta T_2 = \frac{A_2 \cdot T}{A}$$

$$A_2 = \frac{\pi\, a\, b}{2} - a \cdot e \cdot b = \left(\frac{\pi}{2} - e\right) ab \qquad \Delta T_2 = \frac{A_2 \cdot T}{A} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - e\right) ab \cdot T}{\pi\, a\, b} = \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{\pi}\right) T \simeq 2.8\ anni$$

$$\Delta T_1 = \frac{A_1 \cdot T}{A} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + e\right) ab \cdot T}{\pi\, a\, b} = \left(\frac{1}{2} + \frac{e}{\pi}\right) T \simeq 10.8\ anni$$

5. L'Asteroide 704 "Interamnia", scoperto nel 1910, percorre in 5.35 anni un'orbita stabile intorno al Sole, molto prossima al piano dell'eclittica, con eccentricità pari a 0.151. Con l'ausilio di un disegno si dica se l'asteroide costituisce una minaccia per la Terra, ovvero se può collidere con essa. Stimate infine la sua distanza minima dal nostro pianeta.

Soluzione



Detto $\boldsymbol{T}$ il periodo di rivoluzione, il semiasse maggiore $\boldsymbol{a}$ dell'orbita di 704 Interamnia in UA vale:

$$a = \sqrt[3]{T^2} = \sqrt[3]{5.35^2} \simeq 3.06\ UA$$

Nota l'eccentricità **e**, il semiasse minore **b** dell'orbita si ricava dalla relazione:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \simeq 3.06\ UA \cdot \sqrt{1 - 0.0228} \simeq 3.02\ UA$$

La distanza **c** del Sole rispetto all'intersezione dei semiassi è data da:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \simeq \sqrt{3.06^2 - 3.02^2} \simeq 0.493\ UA$$

L'orbita dell'asteroide, sul piano dell'eclittica e stabile, si trova ben all'esterno di quella della Terra, come visibile nel disegno qui sopra. Quindi l'asteroide non costituisce una minaccia per il nostro pianeta
La minima distanza possibile $\boldsymbol{D_{min}}$ dalla Terra si ha nel caso in cui si verificano contemporaneamente le tre seguenti circostanze: asteroide in opposizione, asteroide al perielio, Terra all'afelio. In questa configurazione, detti $\boldsymbol{D_{Ap}}$ la distanza dal Sole dell'asteroide al perielio, $\mathbf{a_T}$ ed $\mathbf{e_T}$ semiasse maggiore ed eccentricità dell'orbita della Terra e $\boldsymbol{D_{Ta}}$ la distanza della Terra dal Sole all'afelio, la distanza di Interamnia dalla Terra in UA sarebbe:

$$D_{min} = D_{Ap} - D_{Ta} = a\,(1 - e) - a_T\,(1 + e_T)$$

$$D_{min} \simeq 3.06\ UA\,(1 - 0.151) - 1\ UA\,(1 + 0.0167) \simeq 1.58\ UA$$

6. Un satellite artificiale orbita attorno alla Terra su un'orbita ellittica con semiassi maggiore e minore rispettivamente pari a $1.522 \cdot 10^4\ km$ e $1.321 \cdot 10^4\ km$. Calcolate la distanza minima del satellite al perigeo e all'apogeo rispetto alla superficie della Terra e il suo periodo di rivoluzione.

Soluzione

Detti **a** e **b** la lunghezza dei due semiassi, l'eccentricità **e** dell'orbita del satellite è data dalla relazione:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} \simeq \sqrt{1 - \left(\frac{1.745 \cdot 10^8\ km^2}{2.316 \cdot 10^8\ km^2}\right)} \simeq 0.4965$$

Le distanze del satellite dal centro della Terra al perigeo $\mathbf{D_P}$ e all'apogeo $\mathbf{D_A}$ valgono quindi:

$$D_P = a\,(1 - e) \simeq 7663\ \text{km} \qquad D_A = a\,(1 + e) \simeq 2.278 \cdot 10^4\ \text{km}$$

La distanza minima di un satellite dalla superficie terrestre si ha quando un osservatore lo vede transitare allo zenith. Quindi per ottenere la distanza minima nei due casi ($\boldsymbol{H_P}$ e $\boldsymbol{H_A}$) basta sottrarre il raggio della Terra alle distanze all'afelio e al perielio:

$$H_P = D_p - R_T \simeq 1285\ \text{km} \qquad H_A = D_A - R_T \simeq 1.640 \cdot 10^4\ \text{km}$$

Applicando la III legge di Keplero generalizzata e considerando che la massa del satellite è ovviamente trascurabile rispetto a quella della Terra, il periodo di rivoluzione **T** è dato da:

$$T = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot M_T}} \simeq \sqrt{\frac{39.48 \cdot 3.526 \cdot 10^{21}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}} \simeq$$

$$\simeq \sqrt{3.493 \cdot 10^8\ s^2} \simeq 1.869 \cdot 10^4\ s \simeq 311.5\ minuti \simeq 5\ h\ \ 12\ minuti$$

7. Un asteroide di forma sferica ha un raggio di 200 km e la sua densità media è pari a quella di Mercurio. Calcolate il valore dell'accelerazione di gravità alla superficie dell'asteroide in m/s^2.

Soluzione

La massa **M** di un corpo, nota la sua densità media $\boldsymbol{\rho}$ e il volume **V** vale:

$$M = \rho\,V$$

In particolare, per un asteroide sferico di raggio $\mathbf{R_a}$, la sua massa $\mathbf{M_a}$ vale:

$$M_a = \rho\,V = \rho\,\frac{4}{3}\,\pi\,R_a{}^3$$

Il problema si può quindi risolvere calcolando la densità $\boldsymbol{\rho}$ di Mercurio e inserendo il valore ottenuto nella formula per il calcolo della massa dell'asteroide.

In alternativa, detti $\mathbf{R_M}$ e $\mathbf{M_M}$ il raggio e la massa di Mercurio e $\boldsymbol{\rho_a}$ e $\boldsymbol{\rho_M}$ le densità dell'asteroide e di Mercurio, consideriamo il rapporto tra la massa dell'asteroide e quella di Mercurio:

$$\frac{M_a}{M_M} = \frac{\rho_a\ \frac{4}{3}\pi\,R_a{}^3}{\rho_M\ \frac{4}{3}\pi\,R_M{}^3}$$

Poiché le densità dei due corpi sono uguali avremo infine:

$$M_a = M_M\left(\frac{R_a}{R_M}\right)^3$$

$$M_a \simeq 3.301 \cdot 10^{23} kg \left(\frac{200\ km}{2440\ km}\right)^3 \simeq 3.301 \cdot 10^{23} kg \cdot 5.51 \cdot 10^{-4} \simeq 1.82 \cdot 10^{20} kg$$

Nota la massa possiamo calcolare l'accelerazione di gravità $\mathbf{g_a}$ sulla superficie dell'asteroide:

$$g_a = \frac{G \cdot M_a}{{R_a}^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 1.82 \cdot 10^{20}\,kg}{(200 \cdot 10^3\,m)^2} \simeq 0.304\,\frac{m}{s^2}$$

8. Supponete di raddoppiare la massa del Sole. Mantenendo inalterato il valore dell'UA, quanto varrebbe il nuovo periodo di rivoluzione della Terra? Se invece, mantenendo invariata la massa del Sole, raddoppiasse la massa di Mercurio, quale sarebbe il suo nuovo periodo di rivoluzione supponendo invariato il semiasse maggiore dell'orbita?

Soluzione

Scriviamo la III Legge di Keplero indicando con $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{T}$ i valori attuali del semiasse maggiore dell'orbita e del periodo di rivoluzione della Terra e con $\boldsymbol{M_\odot}$ e $\boldsymbol{M_T}$ le masse del Sole e della Terra. Poiché $M_\odot \gg M_T$:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\,(M_\odot + M_T)}{4\,\pi^2} \simeq \frac{G\,M_\odot}{4\,\pi^2}$$

Raddoppiando la massa del Sole e detto $\boldsymbol{T_1}$ il nuovo periodo di rivoluzione della Terra si ha:

$$\frac{a^3}{{T_1}^2} = \frac{G\,(2\,M_\odot + M_T)}{4\,\pi^2} \simeq \frac{2\,G\,M_\odot}{4\,\pi^2} = \frac{G\,M_\odot}{2\,\pi^2}$$

Dividendo membro a membro queste due relazioni si ottiene il nuovo periodo di rivoluzione della Terra:

$$\frac{T_1^2}{T^2} = \frac{1}{2} = 0.5 \qquad \text{da cui:} \qquad T_1 = T\,\sqrt{0.5} \simeq 0.7071\,anni \simeq 258.3\,g$$

Ovviamente si può arrivare alla soluzione calcolando direttamente il nuovo periodo di rivoluzione:

$$T_1 = \sqrt{\frac{2\,\pi^2\,a^3}{G\;M_\odot}} \simeq \sqrt{\frac{19.74 \cdot 3.348 \cdot 10^{33}\,m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}} \simeq 2.231 \cdot 10^7\,\mathrm{s} \simeq 258.3\,\mathrm{g}$$

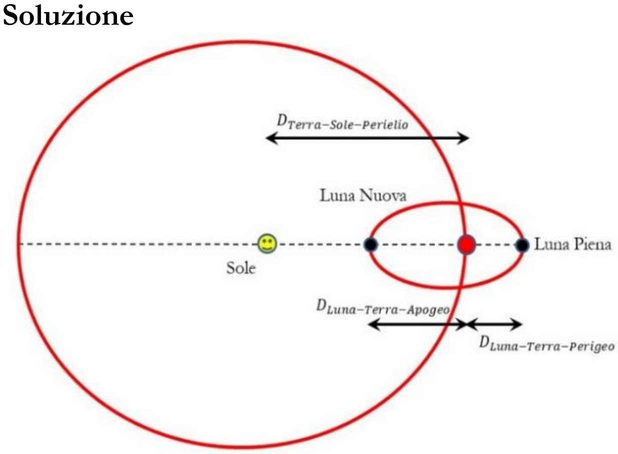
Detti $\boldsymbol{a_M}$, $\boldsymbol{T_M}$, e $\boldsymbol{M_M}$ i valori attuali del semiasse maggiore dell'orbita, del periodo di rivoluzione e della massa di Mercurio, raddoppiando la massa il periodo di rivoluzione $\boldsymbol{T_{1M}}$ resterebbe invariato, in quanto:

$$\frac{{a_M}^3}{{T_M}^2} = \frac{G\,(M_\odot + M_M)}{4\,\pi^2} \simeq \frac{G\,M_\odot}{4\,\pi^2}$$

$$\frac{{a_M}^3}{{T_1}^2} = \frac{G\,(M_\odot + 2\,M_M)}{4\,\pi^2} \simeq \frac{G\,M_\odot}{4\,\pi^2}$$

9. Calcolate, trascurando l'inclinazione dell'orbita lunare sull'eclittica, la distanza minima della Luna Piena e della Luna Nuova dal Sole. Per le eccentricità si assumano i valori: $e_L = 0.05490$ per l'orbita della Luna attorno alla Terra ed $e_T = 0.01671$ per l'orbita della Terra attorno al Sole.

Soluzione



La Luna è Piena quando vista dalla Terra è in direzione opposta al Sole. La sua distanza minima dal Sole $\mathbf{D_{m-LP-\odot}}$ si ha quando la Terra è al perielio e la Luna Piena al perigeo (vedere il disegno, non in scala, a sinistra). Detti $\boldsymbol{a_T}$ e $\boldsymbol{a_L}$ i semiassi maggiori delle orbite della Terra e della Luna, per la distanza della Terra dal Sole al perielio $\mathbf{D_{T\odot-P}}$ e per la distanza della Luna dalla Terra al perigeo $\mathbf{D_{LT-P}}$ si ha:

$$D_{T\odot-P} = a_T\,(1 - e_T) \simeq 147.1 \cdot 10^6\,km$$

$$D_{LT-P} = a_L\,(1 - e_L) \simeq 363.3 \cdot 10^3\,km$$

e quindi:

$$\mathrm{D_{m-LP-\odot}} = \mathrm{D_{T\odot-P}} + \mathrm{D_{LT-P}} \simeq 147.5 \cdot 10^6\ km$$

La Luna è Nuova quando si trova nella stessa direzione e dalla stessa parte del Sole rispetto alla Terra. La sua distanza minima dal Sole $\mathbf{D_{m-LN-\odot}}$ si avrà quando la Terra è al perielio e la Luna all'apogeo. Per la distanza della Luna dalla Terra all'apogeo $\mathbf{D_{LT-A}}$ si ha:

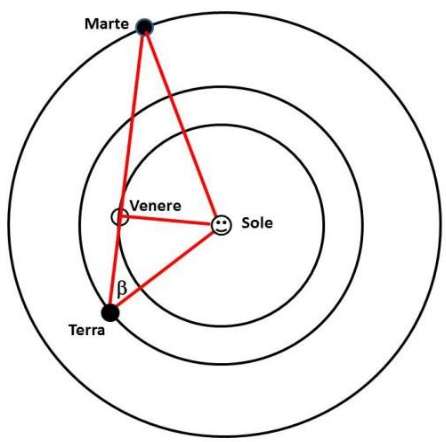
$$\mathrm{D_{LT-A}} = a_L\,(1 + e_L) \simeq 405.5 \cdot 10^3\ km$$

e quindi:

$$\mathrm{D_{m-LN-\odot}} = \mathrm{D_{T\odot-P}} - \mathrm{D_{LT-A}} \simeq 146.7 \cdot 10^6\ km$$

10. Osservate una configurazione planetaria molto particolare, con Venere visibile al tramonto alla massima elongazione est e angolarmente vicinissimo (in congiunzione) con Marte. Calcolate la distanza Terra-Marte in quel momento, assumendo tutte le orbite circolari e trascurando le loro inclinazioni sull'eclittica.
Suggerimento: realizzate un disegno (in scala) dell'orbita dei tre pianeti attorno al Sole. Posizionate i pianeti assumendo che Venere e Marte siano angolarmente così vicini da poter essere collocati sulla stessa retta.

Soluzione



Quando Venere è a una massima elongazione, la retta Terra-Venere è tangente all'orbita di Venere. Con le approssimazioni usate possiamo assumere che Sole, Terra, Venere e Marte si trovino ai vertici di due triangoli rettangoli, con il lato Venere-Sole in comune. Per una massima elongazione est otteniamo il disegno a sinistra. Detti **VT** la distanza Terra-Venere, **MV** la distanza Marte-Venere, **VS** la distanza Venere-Sole, **MS** la distanza Marte-Sole, **TS** la distanza Terra-Sole e **MT** la distanza Marte-Terra possiamo risolvere il problema con il teorema di Pitagora.

$$\mathrm{VT} = \sqrt{\mathrm{TS}^2 - \mathrm{VS}^2} \simeq$$

$$\simeq \sqrt{2.238 \cdot 10^{16}\ \mathrm{km}^2 - 1.171 \cdot 10^{16}\ \mathrm{km}^2} \simeq 103.3 \cdot 10^6\ \mathrm{km}$$

$$\mathrm{MV} = \sqrt{\mathrm{MS}^2 - \mathrm{VS}^2} \simeq \sqrt{5.194 \cdot 10^{16}\ \mathrm{km}^2 - 1.171 \cdot 10^{16}\ \mathrm{km}^2} \simeq 200.6 \cdot 10^6\ \mathrm{km}$$

$$\mathrm{MT} = \mathrm{VT} + \mathrm{MV} \simeq 103.3 \cdot 10^6\ \mathrm{km} + 200.6 \cdot 10^6\ \mathrm{km} \simeq 303.9 \cdot 10^6\ \mathrm{km}$$

11. Calcolare il periodo sinodico di Nettuno se osservato da un corpo il cui semiasse maggiore dell'orbita intorno al Sole vale $227.9 \cdot 10^6$ km.

Soluzione
Dal valore del semiasse maggiore deduciamo che il corpo da cui è fatta l'osservazione è Marte, il cui periodo siderale **P** è:

$$\mathrm{P} \simeq 686.97\ \text{giorni} \simeq 1.8808\ \text{anni}$$

Detto **E** il periodo siderale di Nettuno, il suo periodo sinodico **S** visto da Marte varrà quindi:

$$S = \frac{E \cdot P}{|\,E - P\,|} \simeq \frac{309.93\ anni^2}{162.91\ anni} \simeq 1.9025\ \text{anni} \simeq 694.89\ giorni$$

Nota:
il valore calcolato è espresso in giorni terrestri, ma un osservatore su Marte calcolerebbe tutte le grandezze in unità (giorni o anni) marziane. Il giorno marziano è chiamato "sol".

12. Calcolate il peso di un corpo di massa m = 100 kg all'equatore di Mercurio e all'equatore di Saturno, considerando l'effetto della forza centrifuga dovuta alla rotazione. Il periodo di rotazione dei due pianeti è, rispettivamente, di 1407.5 h e 10h 33m. Poiché Saturno non ha una superficie solida, si assuma come distanza dal centro il raggio medio del pianeta.

Soluzione

Detta **g** l'accelerazione di gravità, il peso **P** di un corpo è la forza di gravità tra corpo e pianeta:

$$P = m\,g$$

Dalla relazione: $g = \frac{G \cdot M}{R^2}$ l'accelerazione di gravità alla superficie di Mercurio $\mathbf{g_M}$ e di Saturno $\mathbf{g_S}$ vale:

$$g_M = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 3.301 \cdot 10^{23}\ kg}{(2440 \cdot 10^3\ m)^2} \simeq 3.700\ \frac{m}{s^2} \qquad g_S = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 5.685 \cdot 10^{26}\ kg}{(60267 \cdot 10^3\ m)^2} \simeq 10.45\ \frac{m}{s^2}$$

In assenza di rotazione il peso del corpo su Mercurio $\mathbf{P_M}$ e su Saturno $\mathbf{P_S}$ sarà quindi:

$$P_M = m \cdot g_M \simeq 370\ N \qquad P_S = m \cdot g_S \simeq 1045\ N$$

Detti **T** il periodo di rotazione, **v** $(= \frac{2\,\pi\,R}{T})$ il modulo della velocità tangenziale alla superficie e **R** il raggio di un pianeta, la forza centrifuga $\mathbf{F_c}$ è data dalla relazione:

$$F_c = m\,\frac{v^2}{R} = m\,\frac{4\,\pi^2 \cdot R}{T^2}$$

e all'equatore è diretta esattamente in senso opposto alla gravità e rende minore il peso del corpo. Per i due pianeti avremo:

$$F_{cM} \simeq 100\ kg\ \frac{39.48 \cdot 2440 \cdot 10^3\ m}{25.67 \cdot 10^{12}\ s^2} \simeq 3.75\ \cdot 10^{-4}\ N \qquad F_{cS} \simeq 100\ kg\ \frac{39.48 \cdot 60267 \cdot 10^3\ m}{144.2 \cdot 10^7\ s^2} \simeq 165\ N$$

Tenendo conto della rotazione il peso del corpo all'equatore di Mercurio $\mathbf{P_{M-R}}$ e di Saturno $\mathbf{P_{S-R}}$ vale:

$$P_{M-R} \simeq 370\ N - 3.75\ \cdot 10^{-4}\ N \simeq P_M \qquad P_{S-R} \simeq 1045\ N - 165\ N \simeq 880\ N$$

13. Un astronauta, il cui peso sulla Terra è di 686.7 N, si trova sulla superficie di un pianeta e lasciando cadere un oggetto misura che per percorrere 5.41 m esso impiega 1.01 secondi. La lunghezza dell'equatore del pianeta, supposto sferico, è pari a $3.657 \cdot 10^4$ km. Quanto vale la massa del pianeta e quanto pesa, trascurando gli effetti dovuti alla rotazione, l'astronauta sul pianeta?

Soluzione

La caduta libera del corpo segue la legge del moto uniformemente accelerato, detto $\boldsymbol{S}$ lo spazio percorso nel tempo $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{g_P}$ l'accelerazione sulla superficie del pianeta si ha:

$$S = \frac{1}{2}\,g_P\,t^2 \qquad g_P = \frac{2\,S}{t^2} \simeq \frac{10.82\ m}{1.02\ s^2} \simeq 10.6\ \frac{m}{s^2}$$

Detta $\boldsymbol{C}$ la lunghezza dell'equatore, il raggio $\boldsymbol{R}$ del pianeta vale:

$$R = \frac{C}{2\pi} \simeq \frac{3.657\ \cdot\ 10^4\ km}{2\pi} \simeq 5.820\ \cdot\ 10^3\ km = 5.820\ \cdot\ 10^6\ m$$

La massa $\boldsymbol{M}$ del pianeta è data dalla relazione:

$$M = g_P\,\frac{R^2}{G} = \frac{10.6\ \frac{m}{s^2} \cdot 3.387\ \cdot\ 10^{13}\ m^2}{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2}} \simeq 5.38\ \cdot\ 10^{24}\ kg$$

La massa dell'astronauta $\boldsymbol{M_a}$ si può ricavare dal suo peso sulla Terra $\boldsymbol{P_T}$ e, detta $\mathbf{g_T}$ l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre, vale:

$$M_a = \frac{P_T}{g_T} \simeq \frac{686.7\ kg\ \frac{m}{s^2}}{9.807\ \frac{m}{s^2}} \simeq 70.02\ kg$$

Il suo peso $\boldsymbol{P_P}$ sul pianeta sarà quindi:

$$P_P = M_a \cdot g_P \simeq 70.02\ kg \cdot 10.6\ \frac{m}{s^2} \simeq 742\ \frac{kg\ m}{s^2} = 742\ N$$

14. Un pianeta di massa $1.6 \cdot 10^{26}$ kg si muove attorno a una stella su un'orbita il cui semiasse maggiore è di 9.00 UA con un periodo di 20.0 anni. Trovare la massa (in kg e in unità di masse solari) e il raggio (in km e in unità del raggio solare) della stella, sapendo che l'accelerazione di gravità sulla fotosfera della stella è 54 volte quella che si ha sulla superficie della Terra.

Soluzione

Detto **a** il semiasse maggiore dell'orbita e **T** il periodo di rivoluzione, trascurando la massa del pianeta (vedere nota alla fine), ricaviamo la massa della stella $\mathbf{M_s}$ dalla III legge di Keplero:

$$\mathrm{M_s} = \frac{4\ \pi^2\ a^3}{G\ T^2} \simeq \frac{39.48 \cdot 2.44 \cdot 10^{36}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 3.98 \cdot 10^{17}\ s^2} \simeq 3.63 \cdot 10^{30}\ kg \simeq 1.82\ M_\odot$$

Detta $\mathbf{g_S}$ l'accelerazione di gravità sulla fotosfera della stella e $\mathbf{g_T}$ l'accelerazione di gravità sulla superficie della Terra, possiamo ricavare il raggio della stella $\mathbf{R_s}$ dalla relazione:

$$R_s = \sqrt{\frac{G \cdot M_s}{g_S}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_s}{54 \cdot g_T}}$$

$$R_S \simeq \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 3.63 \cdot 10^{30}\ kg}{54 \cdot 9.807\ \frac{m}{s^2}}} \simeq 6.76 \cdot 10^5\ km \simeq 0.973\ R_\odot$$

Nota.

L'assunzione iniziale della massa del pianeta trascurabile rispetto a quella, non ancora nota, della stella, risulta giustificata in quanto sappiamo, dallo studio della struttura ed evoluzione stellare, che la massa minima di una stella è: $\mathrm{M_{minima-stella}} \geq 0.08 \cdot \mathrm{M_\odot} \simeq 1.59 \cdot 10^{29}\ \mathrm{kg} \simeq 1000 \cdot \mathrm{M_{pianeta}}$

15. Calcolate il minimo periodo di rivoluzione di un corpo di piccola massa che si muove su un'orbita circolare attorno a una nana bianca (White Dwarf = WD) il cui raggio è pari a quello della Terra. A che frazione della velocità della luce si muove il corpo? Nella soluzione si tenga conto che il massimo valore possibile per la massa di una WD (detto limite di Chandrasekhar) è pari a 1.44 volte la massa del Sole.

Soluzione

Il periodo di rivoluzione **T** di un corpo di massa trascurabile in orbita a una distanza **a** intorno a una stella di massa **M** vale:

$$\mathrm{T} = \sqrt{\frac{4\ \pi^2 \cdot a^3}{G \cdot M}}$$

Il valore minimo del periodo $\mathbf{T_{MIN}}$ si avrà quando il raggio dell'orbita è minimo (poiché si trova al numeratore), e quando la massa della WD è massima (poiché si trova al denominatore). Il raggio minimo dell'orbita è pari al raggio $\mathbf{R_{WD}}$ della WD, che sappiamo essere pari al raggio della Terra $\mathbf{R_T}$. Dalla teoria dell'evoluzione stellare sappiamo che il valore massimo $\boldsymbol{M_{WD-max}}$ della massa di una WD è pari a 1.44 volte la massa del Sole $\boldsymbol{M_\odot}$. Avremo quindi:

$$T_{MIN} = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 \cdot\ {R_T}^3}{\mathrm{G}\ \cdot 1.44\ \mathbf{M}_{\odot}}}$$

$$T_{MIN} \simeq \sqrt{\frac{4\ \cdot\ \pi^2\ \cdot 2.595\ \cdot\ 10^{20}\ m^3}{6.674\ \cdot 10^{-11} \dfrac{m^3}{kg\ s^2}\ \cdot 1.44\ \cdot 1.989\ \cdot\ 10^{30}\ kg}}\ \simeq 7.32\ s$$

Detta **C** la lunghezza dell'orbita del corpo, la sua velocità **v** è data da:

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{T}} = \frac{2\,\pi\,\mathrm{R_T}}{T} \simeq \frac{40074\ \mathrm{km}}{7.32\ \mathrm{s}} \simeq 5.47\ \cdot\ 10^3\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \simeq 0.0183\ c = 1.83\ \cdot 10^{-2}\ c$$

16. Un satellite artificiale ruota attorno alla Terra, che assumiamo perfettamente sferica, su un'orbita equatoriale circolare a una distanza di 4325 km dalla superficie. Un osservatore lo vede passare al meridiano a mezzanotte. Dopo quanto tempo lo vedrà passare nuovamente al meridiano se:
a) il satellite si muove da Ovest verso Est;
b) il satellite si muove da Est verso Ovest?

Soluzione

Detta **h** l'altezza del satellite dalla superficie e $\boldsymbol{R_T}$ il raggio della Terra, la distanza $\boldsymbol{D}$ del satellite dal centro della Terra vale:

$$\mathbf{D} = \mathrm{R_T} + h = 6378 + 4325 = 10703\ \mathrm{km}$$

Possiamo ricavare il periodo di rivoluzione $\boldsymbol{T_s}$ del satellite dalla III legge di Keplero:

$$\mathrm{T_s} = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2\ \mathrm{D}^3}{\mathrm{G} \cdot \mathrm{M_T}}} \simeq \sqrt{\frac{39.478\ \cdot 1.2261 \cdot 10^{21}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \dfrac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}}\ \simeq 11020\ s \simeq 183.7\ m\ \simeq 3h\ 4m$$

I passaggi successivi del satellite al meridiano di un luogo avvengono a intervalli di tempo pari al suo periodo sinodico $\boldsymbol{S}$ riferito al periodo di rotazione siderale della Terra $\mathbf{T_T}$ (= 23h 56m 4s = 86164 s).

a. Se il satellite si muove da Ovest verso Est, ovvero nello stesso senso della rotazione della Terra, vale la relazione:

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{T_s} \cdot \mathrm{T_T}}{|\ \mathrm{T_s} -\ \mathrm{T_T}\ |} \simeq \frac{11020\ s \cdot 86164\ s}{75144} \simeq 12640\ s \simeq 210.6\ m\ \simeq 3h\ 31m$$

b. Se il satellite si muove da Est verso Ovest, ovvero in direzione opposta alla rotazione della Terra, vale la relazione:

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{T_s} \cdot \mathrm{T_T}}{|\ \mathrm{T_s} + \mathrm{T_T}\ |} \simeq \frac{11020\ s \cdot 86164\ s}{97184} \simeq 9770\ s\ \simeq 162.8\ m\ \simeq 2h\ 43m$$

17. Considerate un ipotetico osservatore posto al centro della Terra e calcolate le dimensioni angolari (diametro apparente) che misurerebbe per il Sole quando la Terra si trova all'afelio e al perielio. Confrontate questi valori con quelli che misurerebbe per le dimensioni angolari della Luna al perigeo e all'apogeo.

Soluzione

Detti $\mathbf{a_T}$ il semiasse maggiore ed $\mathbf{e_T}$ l'eccentricità dell'orbita della Terra, le distanze dell'osservatore dal Sole all'afelio $\mathbf{d_{A\odot}}$ e al perielio $\mathbf{d_{P\odot}}$ valgono:

$$d_{A\odot}\ =\ a_T\ (1 +\ e_T)\ \simeq 152.1\ \cdot\ 10^6\ km \qquad\qquad d_{P\odot}\ =\ a_T\ (1 -\ e_T)\ \simeq 147.1\ \cdot\ 10^6\ km$$

Quindi, detto $\mathbf{R_\odot}$ il raggio del Sole, per un osservatore al centro della Terra le dimensioni angolari minime $\mathbf{D_{A\odot}}$ (Terra all'afelio) e massime $\mathbf{D_{P\odot}}$ (Terra al perielio) del Sole valgono:

$$\mathrm{D_{A\odot}} = 2\ \cdot\ \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R_\odot}}{\mathrm{d_{A\odot}}}\right)\ \simeq 31'.44 \qquad\qquad \mathrm{D_{P\odot}} = 2\ \cdot\ \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R_\odot}}{\mathrm{d_{P\odot}}}\right)\ \simeq 32'.51$$

Detti $\mathbf{a_L}$ il semiasse maggiore ed $\mathbf{e_L}$ l'eccentricità dell'orbita della Luna, le distanze dell'osservatore dalla Luna all'apogeo $\mathbf{d_{AL}}$ e al perigeo $\mathbf{d_{PL}}$ valgono:

$$d_{AL} = a_L\,(1 + e_L) \simeq 405.5 \cdot 10^3\ km \qquad\qquad d_{PL} = a_L\,(1 - e_L) \simeq 363.3 \cdot 10^3\ km$$

Quindi, detto $\boldsymbol{R_L}$ il raggio della Luna, per un osservatore al centro della Terra le dimensioni angolari minime $\mathbf{D_{AL}}$ (Luna all'apogeo) e massime $\mathbf{D_{PL}}$ (Luna al perigeo) della Luna valgono:

$$\mathrm{D_{AL}} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R_L}}{\mathrm{d_{AL}}}\right) \simeq 29'.47 \qquad\qquad \mathrm{D_{PL}} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R_L}}{\mathrm{d_{PL}}}\right) \simeq 32'.89$$

Notiamo che quando la Luna si trova all'apogeo la sua dimensione angolare è minore di quella del Sole anche quanto la Terra è all'afelio, mentre quando la Luna si trova al perigeo la sua dimensione angolare è maggiore di quella del Sole anche quando la Terra è al perielio.

18. A quale distanza dalla superficie della Terra un uomo con massa di 80.0 kg ha un peso di 600 N?

Soluzione
Detta **g** l'accelerazione di gravità, il peso **P** è dato dalla relazione: P = m g. Detta **r** la distanza dal centro della Terra, per avere P = 600 N occorre che l'accelerazione di gravità $\mathbf{g_r}$ sia:

$$\mathrm{g_r} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{m}} = \frac{600\ \dfrac{kg\,m}{s^2}}{80.0\ \mathrm{kg}} = 7.50\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$$

Detta **h** l'altezza sulla superficie e **R** e $\mathbf{M_T}$ raggio e massa della Terra, si ha: r = R + h e quindi:

$$\mathrm{g_r} = \frac{\mathrm{G\,M_T}}{\mathrm{r^2}} = \frac{\mathrm{G\,M_T}}{\mathrm{(R+h)^2}}$$

Risolvendo rispetto ad **h** si ha:

$$(\mathrm{R+h})^2 = \frac{\mathrm{G\,M_T}}{\mathrm{g_r}} \qquad \text{da cui: } \mathrm{R+h} = \sqrt{\frac{\mathrm{G\,M_T}}{\mathrm{g_r}}} \qquad \text{e infine: } \mathrm{h} = \sqrt{\frac{\mathrm{G\,M_T}}{\mathrm{g_r}}} - \mathrm{R}$$

$$h \simeq \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}{7.50\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}}} - 6378 \cdot 10^3\ km \simeq 912 \cdot 10^3\ m = 912\ km$$

Nota:
Sulla superficie della Terra una massa di 80.0 kg ha un peso di 784 N.

19. Le stelle di neutroni sono corpi estremamente densi e in rapida rotazione. Consideriamo una di tali stelle con raggio di 15.1 km e periodo di rotazione pari a $1.41 \cdot 10^{-3}$ s.

1. Stimate la velocità tangenziale all'equatore in frazione della velocità della luce;
2. Stimate la sua massa minima per trattenere oggetti all'equatore altrimenti espulsi a causa della rotazione;
3. Spiegate perché una stella di neutroni ruota così velocemente.

Soluzione

1. Detti $\boldsymbol{R}$ il raggio della stella e $\boldsymbol{M}$ la sua massa, la velocità tangenziale $\boldsymbol{v_t}$ all'equatore è data dalla relazione:

$$\mathrm{v_t} = \frac{2\,\pi\,\mathrm{R}}{\mathrm{T}} \simeq \frac{2\,\pi \cdot 15.1\ \mathrm{km}}{1.41 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}} \simeq 6.73 \cdot 10^4\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \simeq 0.224\ \mathrm{c}$$

2. Per impedire che un corpo di piccola massa sfugga a causa della rotazione, la forza di gravità deve essere almeno uguale alla forza centrifuga. Ciò equivale a dire che il modulo della velocità tangenziale all'equatore deve essere al massimo pari alla prima velocità cosmica:

$$v_t = \sqrt{\frac{G\,M}{R}}$$

da cui ricaviamo il valore minimo della massa $\boldsymbol{M_{min}}$ della stella di neutroni:

$$M_{min} = \frac{R \cdot v_t^2}{G} \simeq \frac{15.1 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot 4.53 \cdot 10^{15} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}} \simeq 1.02 \cdot 10^{30} \text{ kg} \simeq 0.515 \text{ M}_\odot$$

3. Una stella di neutroni è il resto di una stella di grande massa (> 10 $M_\odot$) esplosa come supernova. Prima di esplodere la stella era una gigante o supergigante rossa. La conservazione del momento angolare (anche se in realtà nel corso dell'esplosione gran parte del momento angolare viene perso) fa sì che la stella di neutroni abbia un periodo di rotazione estremamente breve.

Nota.
Il valore ottenuto per la massa è un limite minimo; le stelle di neutroni hanno masse $\boldsymbol{M}$ comprese nell'intervallo:

$$1.5 \text{ M}_\odot < M < 2.1 \text{ M}_\odot$$

20. Una stella di neutroni ha raggio di 15.0 km e massa pari al doppio di quella del Sole. Calcolare: la densità media della stella, l'accelerazione di gravità sulla sua superficie, la velocità di arrivo al suolo di un corpo che, partendo da fermo, cade da un'altezza di 2 m e il tempo di caduta del corpo. Calcolare inoltre il peso sulla superficie della Terra di 1 cm^3 di materia della stella di neutroni e le dimensioni di un cubo di ferro (densità del ferro ϱ_{FE} = 7870 kg/m^3) con la stessa massa di 1 cm^3 di materia della stella di neutroni.

Soluzione
Detti **M** la massa, **V** il volume e **R** il raggio, la densità media $\boldsymbol{\rho}$ della stella di neutroni è data dalla relazione:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3\,M}{4\,\pi\,R^3} \simeq \frac{3 \cdot 3.978 \cdot 10^{30}\,kg}{12.57 \cdot 3.38 \cdot 10^{12}\,m^3} \simeq 2.81 \cdot 10^{17}\,\frac{kg}{m^3} \simeq 2.81 \cdot 10^{11}\,\frac{kg}{cm^3}$$

L'accelerazione di gravità $\mathbf{a_{gN}}$ sulla superficie della stella di neutroni vale:

$$a_{gN} = \frac{G\,M}{R^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 3.978 \cdot 10^{30}\,kg}{225 \cdot 10^6\,m^2} \simeq 1.18 \cdot 10^{12}\,\frac{m}{s^2}$$

Poiché il rapporto **K** tra la distanza iniziale **h** del corpo dalla superficie e il raggio della stella vale:

$$K = \frac{h}{R} = \frac{2\,m}{15\,km} \simeq 1.3 \cdot 10^{-4}$$

possiamo considerare costante l'accelerazione di gravità lungo il percorso e calcolare la velocità di arrivo $\boldsymbol{v}$ considerando un moto uniformemente accelerato con partenza da fermo:

$$v = \sqrt{2\,a_{gN}\,h} \simeq \sqrt{2 \cdot 1.18 \cdot 10^{12}\,\frac{m}{s^2} \cdot 2\,m} \simeq 2.17 \cdot 10^6\,\frac{m}{s} = 2.17 \cdot 10^3\,\frac{km}{s} \simeq 7 \cdot 10^{-3}\,c$$

Il tempo $\boldsymbol{t}$ di caduta è dato dalla relazione:

$$t = \sqrt{\frac{2\,h}{a_{gN}}} = \sqrt{\frac{4\,m}{1.18 \cdot 10^{12}\,\frac{m}{s^2}}} \simeq 1.84 \cdot 10^{-6}\,s$$

La massa $\boldsymbol{M_1}$ di 1 cm^3 di materia della stella di neutroni vale:

$$M_1 = V \cdot \rho \simeq 1\,cm^3 \cdot 2.81 \cdot 10^{11}\,\frac{kg}{cm^3} \simeq 2.81 \cdot 10^{11} \text{ kg}$$

Detta $\mathbf{a_{gT}}$ l'accelerazione di gravità sulla superficie della Terra, il peso $\boldsymbol{P_1}$ della massa $\boldsymbol{M_1}$ sarebbe:

$$P_1 = M_1 \, \mathrm{a_{gT}} \simeq 2.81 \cdot 10^{11} \, \mathrm{kg} \cdot 9.807 \, \frac{m}{s^2} \simeq 2.76 \cdot 10^{12} \, N$$

Per avere una massa di ferro $\boldsymbol{M_{Fe}}$ pari a $\boldsymbol{M_1}$ avremo bisogno di un volume di ferro $\boldsymbol{V_{Fe}}$ pari a:

$$V_{Fe} = \frac{M_{Fe}}{\varrho_{Fe}} \simeq \frac{2.81 \cdot 10^{11} \, \mathrm{kg}}{7870 \, \frac{kg}{m^3}} \simeq 3.57 \cdot 10^7 \, m^3$$

e quindi di un cubo con lato $\boldsymbol{L}$ pari a:

$$L = \sqrt[3]{V_{Fe}} \simeq \sqrt[3]{3.57 \cdot 10^7 \, m^3} \simeq 329 \, m$$